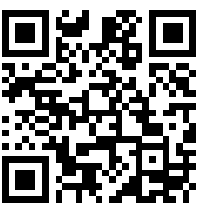
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

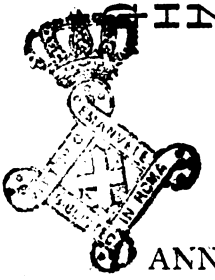
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO XIV — Fasc. I.

TORINO

ROSENBERG & SELLIER

Via Maria Vittoria, 18

1912

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo.

G. Loria, Intorno allo stato presente ed alla sorte futura di una Bibliografia matematica del Secolo XIX pag. 1-6.

Meccanica razionale (Castellano) pag. 7.

La trottola (F. Klein und A. Sommerfeld) pag. 8-24.

Calcolo differenziale (Young) pag. 25-27.

Tavole numeriche (Bernardi, Wanach) pag. 27-28.

Geometria non-euclidea (Coolidge) pag. 29-30.

Attualità (Poincaré) pag. 30-31.

Notizie. Ermanno Schubert. Tema proposto della Società Jablonowski per l'anno 1913.

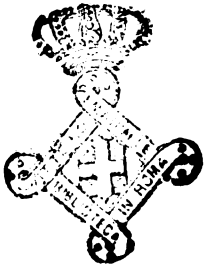
Digitized by Google

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO XIV
1912

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1912

Digitized by Google

Proprietà Letteraria

Pavia — Premiata Tipografia Successori Fratelli Fusi — Pavia

Digitized by Google

INDICE

G. Loria, Intorno allo stato presente ed alla sorte futura di una Bibliografia matematica del Secolo XIX, p. 1-6.

H. Vogt, Osservazioni storiche sopra la scoperta degli irrazionali. Replica a T. L. Heath, p. 33-35.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

F. Castellano. Lezioni di meccanica razionale (G. Peano), p. 7. — **F. Klein** und **A. Sommerfeld.** Ueber die Theorie des Kreisels (E. Daniele), p. 8-24. — **W. H. Young.** The fundamental theorems of the differential calculus (G. Vivanti), p. 25-27. — **G. Bernardi.** Tavole (G. L.), p. 27-28. — **B. Wanach.** Tafeln (G. L.), p. 28. — **J. L. Coolidge.** Non-euclidian geometry (G. Sannia), p. 29-30. — **H. Poincaré.** Sechs Vorträge (G. L.), p. 30-31. Annuaire pour l'an 1912 publié par le Bureau des longitudes (G. L.), p. 31. — **L. Euleri.** Opera omnia. Ser. I, T. I (G. L.), p. 35-37. — **A. Guldberg** und **G. Wallenberg.** Theorie der linearen Differenzgleichungen (S. Pincherle), p. 37-42. — **G. Helm.** Die Grundlagen der höheren Matematik (G. L.), p. 42-44. — **M. Böcher.** Einführung in die höhere Algebra (G. L.), p. 44-46. — **G. Bauer.** Vorlesungen über Algebra (G. L.), p. 46. — **L. Berzolari.** Geometria analitica, Parte I (G. Z. Giambelli), p. 46-47. — **P. Treutlein.** Der geometrische Anschauungsunterricht (G. L.), p. 47-48. — **W. Peyerle.** Ableitung algebr. Kurven aus dem Durchschnitte von Flächen (G. L.), p. 48-49. — **Hâton de la Goupillière.** Roulettes (G. L.), p. 49. — **E. Borel.** Die Elemente der Mathematik, II Bd. (G. L.), p. 50. — **F. Enriques.** Fragen der Elementarmathematik (G. L.), p. 50-51. — **H. Thieme.** Grundlehren der Mathematik, II Bd. (S. Medici), p. 51-54. — **Y. Mikami.** Mathem. Papers from the Far West (G. L.), p. 55-56. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche: Duhem, Alasia, Ceretti, Amodeo, Bosmans, Cantor, Favaro, De Toni (G. L.), p. 57-61. — **E. Kummer's.** Festschrift (G. L.), p. 55-57. — Oeuvres de **Descartes** (G. L.), p. 65-73. — **E. B. Christoffel.** Gesammelte mathematische Abahandlungen (G. L.), p. 73. — **H. Grassmann.** Ges. mathem. und phys. Werke, III Bd. II, T. I (G. L.), p. 73-79. — **T. Vahlen.** Konstruktionen und Approximationen (G. L.), p. 79-81. — L'ultimo teorema di Fermat (G. Vivanti), p. 82-85. — **E. Netto.** Die Determinanten (G. L.), p. 85-86. — **F. Müller.** Gedankentagebuch (G. L.), p. 86. — Register op de wiskundige opgaven (G. L.), p. 86-87. — **A. B. Basset.** A treatise on the geometry of surfaces (G. L.), p. 88-89. — **T. Reye.** Die Geometrie der Lage (G. L.), p. 89. — **H. Grassmann.**

Digitized by Google

Jr. Projektive Geometrie der Ebene, I Bd. (G. L.), p. 90. — **R. Gans.** Einführung in die Vektoranalysis (G. L.), p. 91. — **R. Bricard.** Géometrie descriptive. — **U. Perazzo.** Lezioni di geometria descrittiva. — **F. von Dalwick.** Vorl. über darst. Geometrie, I. Bd. — **G. Hauck.** Vorl. über darst. Geometrie, I. Bd. (G. L.), p. 91-95. — Abhand. zur Reform des mathem. Unterricht in Ungarn (G. L.), p. 95-101. — **M. De Franchis.** Complementi di Geometria (M. Cipolla), p. 101-105. — **G. Herting.** Von Strecke, Quadrat und Wurzel zum bestimmten Integral (A. Perna), p. 105-107. — **G. Marletta.** Trattato di geometria elementare (A. Finzi), p. 107-112. — **M. De Franchis.** Elementi di trigonometria rettilinea (G. Mignosi), p. 112-117. — **A. Pensa.** Elementi di geometria (C. Burali-Forti), p. 117-121. — Rassegna delle recenti dissertazioni di laurea: Kleber, Braude, Eggers, Kössler, Letz, Falckenburg, Nugel, Just, Polidori, Kempner, Turrière (G. L.), p. 121-126.

NOTIZIE.

E. Schubert. Tema proposto dalla Società Jablonowski, p. 31-32.

A. A. Bjornbö. Materiali per una nuova biografia di Gauss. Tema proposto dalla R. Accademia di Madrid. Per la storia della convergenza delle serie. Nuova interpretazione di un passo di Pappo. Bryn Mawr College Monographs. Intern. Ass. for promoting the study of quaternions. Nuovi documenti relativi alla matematica medioevale. Nuove notazioni algebriche, p. 61-64.

Il cardinale di Cusa. Tema proposto dalla R. Acc. dei Danimarca. Storia dell'astronomia presso gli Arabi del Medio Evo. La fusione nell'insegnamento matematico. Modelli di geometria ad uso didattico. La perenne fortuna di Euclide. Una biografia di G. R. Boscovich, p. 126-128.

ERRATA.

P. 36 penultima linea leggasi CHERBULIEZ.

P. 44 quartultima linea, dopo *superiore* si ponga =.

P. 57 linea 14 dal basso leggasi COPERNIC.

P. 59 linea 10 dall'alto leggasi MORITZ CANTOR.

P. 63 linea 5 dall'alto dopo *Aprile* si ponga 1906.

P. 63 linea 15 dal basso leggasi ROBERTO SIMSON.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XIV — Gennaio, Febbraio e Marzo — 1912

GINO LORIA

Intorno allo stato presente ed alla sorte futura

di una Bibliografia matematica del Secolo XIX

La produzione matematica ha assunto nel corso del secolo passato uno sviluppo tanto considerevole che il seguirla fu cosa assai malagevole ed ancor più arduo è il prendere oggi conoscenza esatta dei risultati che essa ha dati (1). Eppure il rendersi esatto conto dello stato attuale di una teoria è oggi pressochè indispensabile a chi aspiri, non a ricalcare le orme dei predecessori, ma battere nuove vie, che conducano a terre dianzi inesplorate: perciò il redigere un bilancio degno di fede dello stato attuale della nostra ricchezza matematica, il quale possa venire consultato e compreso da tutti gli aspiranti ad accrescerlo, divenne necessità pressochè assoluta e venne notata da tutti gli studiosi (2), alcuni dei quali si adoperarono a somministrare ai propri sucessori lo strumento di studio, la cui necessità diveniva ogni giorno più imperiosa. Ma i primi lavori che così nacquero si mostrarono ben presto impari al compito affidato loro (il piú cospicuo di essi è l' ottimo *Catalogue of scientific Papers,* pubblicato dalla Società Reale di Londra, che ha il duplice difetto di abbracciare tutte le scienze positive e di essere, quindi, troppo ingombrante per uno specialista, e di non dare notizia

(1) Narrasi che un giorno Larange si felicitasse di essere stato contemporaneo di Eulero, perchè così potè seguirne la colossale produzione scientifica; che cosa direbbe egli, se rialzasse la testa dopo un sonno centenario, contemplando quello che scrissero i matematici posteriori!

(2) Fra coloro che avvertirono tale bisogno va citato con grande onore G. Bellavitis il quale, sino dal 1861, pubblicava una *Proposta di un repertorio generale delle pubblicazioni matematiche* (Atti del R. Istituto Veneto VI Serie, T. VI).

Digitized by Google

delle opere di maggior lena, pubblicate a parte), onde, circa un quarto di secolo fà, quasi contemporaneamente, a Parigi ed a Berlino si è pensato alla compilazione di una completa *Bibliografia matematica del Secolo XIX*. Vi pensò a Parigi un gruppo di matematici, a cui devesi la concezione, l'organizzazione e la parziale esecuzione del *Repertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, di cui i nostri lettori conoscono probabilmente il piano e fors'anche i gruppi di schede stampate, già poste in commercio. Vi pensò a Berlino un valente coraggioso bibliotecario, G. Valentin, profondo conoscitore di tutti i segreti della scienza e dell'arte bibliografiche.

In origine egli pensò di far cominciare il proprio lavoro dalla invenzione della stampa e di chiuderlo col 1868, anno in cui, per merito di C. Ohrtmann, venne iniziata la pubblicazione dell'inestimabile *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, e sin dal Febbraio 1885 intraprese la sua opera di collettore, spogliando i Cataloghi delle biblioteche e gli Indici delle raccolte periodiche poste a sua disposizione. Con tale intensità egli procedette che, cinque anni dopo, annunziava di avere adunate 70 mila titoli, dei quali 52 mila riflettevano memorie accademiche od articoli di giornali, e manifestava la speranza di finire la sua messe entro l'anno 1895. Ma, nel frattempo, la decisione presa dalla Società Reale di Londra di promuovere un accordo per la compilazione di una bibliografia periodica delle pubblicazioni fatte a partire dall'alba del Secolo presente, le consigliò ad estendere le sue fatiche sino a tutto l'anno 1900. In tale anno egli aveva raccolti 120 mila titoli (di cui più di 90 mila appartenenti a lavori pubblicati in periodici) e prevedeva che ne avrebbe potuti aggiungere altri 30 mila. Ed infatti, oggi che tutto il materiale è ammassato, il Valentin dispone di circa 150 mila schede, disposte in ordine alfabetico. Attualmente egli attende a rivederle, riordinarle meglio (avvicinando, ad esempio, le schede relative alle varie edizioni ed alle eventuali traduzioni di una stessa opera) e poi distribuirle in modo che, dopo stampate, formino sei volumi intitolati come segue: I. *Generalità*. II. *Algebra elementare, Analisi*. III. *Algebra superiore, Analisi*. IV. *Geometria e Geodesia*. V. *Meccanica e Balistica*. VI. *Astronomia, fisica, chimica*.

Digitized by Google

*
* *

Prima di vedere coronata l' opera a cui consacrò la miglior parte della sua vita il Valentin deve risolvere due questioni, una di indole puramente teorica e l' altra esclusivamente pratica, sopra le quali ci sia lecito fare qualche osservazione.

*
* *

La prima è di ordinare *per materie* l' ingente materiale raccolto e finora distribuito soltanto *per ordine alfabetico* in base alla considerazione degli autori, questione non soltanto ardua, ma non suscettibile di una soluzione indipendente dalle opinioni di chi ne è autore, perchè *a base di ogni distribuzione per materie sta una classificazione delle scienze,* problema attorno a cui da tempo si affaticano scienziati e filosofi, senza ancor giungere ad una soluzione definitiva. Per quanto concerne le matematiche, sarebbe desiderabile che il Valentin resistesse alla tentazione di proporre una nuova classificazione, ed adottasse una di quelle già in uso epperò famigliari, se non a tutti, almeno a molti fra i suoi futuri lettori.

Una di esse è quella che nel 1868 venne adottata dall' Ohrtmann e che, salvo alcuni ritocchi necessitati dall' incessante progredire della scienza, venne sempre conservata nei 40 volumi che ormai conta il *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* Una seconda sta a base del succitato *Repertoire bibliographique des sciences mathématiques* ed è assai nota, non foss'altro perchè fu adottata dalla Società matematica di Amsterdam a cui si debbono venti volumi della *Revue sémestrielle des publications mathématiques.* Una terza venne fissata, col concorso di eminenti scienziati di tutto il mondo, dalla Società Reale di Londra, quando si pose a capo della compilazione dell' *International Catalogue of scientific literature*; è fondata sopra il sistema decimale del Dewey e venne applicata in altra pubblicazione, proveniente dalla stessa fonte, e di cui dovremo occuparci fra poco. A questi sistemi potrebbesi aggiungere quella adottata nell' eccellente *Mathematischer Bücherschatz* di E. Wölffing, se questo avesse raggiunto la notorietà e diffusione di cui godono le pubblicazioni anzidette. Intanto sia lecito ad un costante lettore e collaboratore di quelle tre grandi opere periodiche il dichiarare che ciascuno dei tre sistemi (per così esprimerci) tedesco, francese ed inglese, ha ottime qualità e che i suoi inevitabili difetti non producono inconvenienti quando si usi a dovere.

Digitized by Google

*
* *

Esitono già lavori congeneri a quello al quale attualmente attende il Valentin, i quali potranno essere da lui consultati in parte come guida ed in parte per evitare qualche scoglio pericoloso.

Cito di passaggio i 27 volumi della *Bibliographie der deutschen Zeitschriften-Literatur* di F. Dietrich; li cito perchè presentano un'ottima disposizione tipografica e perchè è ivi adottato il sistema chiaro ed economico di designare ogni periodico con un numero, il cui significato risulta dall'Elenco con cui si apre ogni volume; ma li cito soltanto di passaggio perchè il piano di tale pubblicazione è radicalmente differente da quello dell'opera in gestazione di cui ci occupiamo, dal momento che si riferisce ad un solo popolo, ma abbraccia tutte le manifestazioni del pensiero ed inoltre ogni volume si riferisce ad un solo anno.

Più utili (meglio come antidoto, che come campione) riusciranno all'eminente bibliotecario di Berlino i due bei volumi pubblicati con i titoli seguenti: *R. Society of London. Catalogue of scientific Papers 1800-1900. Subject Index. Volume I. Pure Mathematics (Cambridge 1908) Volume II. Mechanics* (*Cambridge* 1909), ottenuta dello spoglio di circa 700 collezioni periodiche. Un'opera di tal fatta va adoperata lungamente prima che si possa pronunciare un definitivo giudizio intorno alla sua struttura ed al suo funzionamento; onde io non mi sento di manifestare in poche frasi il mio parere intorno al valore di quella indicata. Tuttavia debbo dichiarare che, avendola posta alla prova in parecchie circostanze, ho dovuto concludere che essa è capace di prestare servizi ben limitati: e per dar ragione al lettore dei « considerando » di questa severa sentenza, addurrò alcuni esempi.

Apriamo il I dei succitati volumi a pagina 477, ove si trova il Capitolo relativo alla Geometria descrittiva. Ivi è registrato (con un'opportunità su cui si sarebbe molto a ridire) un lavoro geometrografico di Lemoine; dato e non concesso che questo scritto occupi il posto che gli spetta, non era il caso di unirvi tutti gli altri lavori sopra la Geometrografia? E dove si trovano essi invece? Non ci fu dato saperlo. Nella stessa pagina è segnalato un articolo dello Chevillard sopra le quadrisecanti di una quaderna di rette; ora dove sono registrati i numerosi altri lavori sopra il medesimo tema? Casualmente ne trovammo, quattro

Digitized by Google

pagine dopo, uno dello Schlömilch sotto la rubrica *Trasversali;* ma dove pescare gli altri? Altrettanto deplorevole è che un articolo di C. Sthephanos sopra gli immaginari in geometria si trovi a pag. 479 nel paragrafo *Geometria projettiva* mentre i congeneri lavori del Lüroth, di R. Sturm e dello Schröder siano registrati sei pagine avanti sotto la rubrica *Birapporto*; ed altrove uno consimile di F. Klein. La spiegazione di questo fatto sta in ciò che, nel titolo della prima di quelle memorie si trova la parola « immaginario », mentre in quelli delle altre tre si legge la parola « birapporto » (Würf), onde è certo che i compilatori si lasciarono traviare da una differenza superficiale e così non si accorsero di una identità sostanziale. Il che è tanto più grave perchè non si tratta di un fatto isolato; infatti a pag. 159 sotto la rubrica « esistenza delle radici » si trovano elencati molti lavori sopra il teorema che afferma avere ogni equazione algebrica una radice; ma fra essi non si trova uno notissimo del Mertens, il quale s'incontra nella pag. prec. come relativo al « teorema fondamentale dell'algebra »; ora, è forse malignità il supporre che la identità di questo teorema con quello surriferito fosse ignoto agli autori dell' opera in discorso? Dati questi fatti, come si può con fiducia ritenerla degna di servire di quida per chi voglia conoscere la letteratura sopra un dato soggetto? Ammettiamo che per una semplice svista le celebri *Vier Vorlesungen über analytische Geometrie* di O. Hesse siano state poste nella rubrica Geometria descrittiva e che un lavoro di G. Bordiga sopra la classificazione delle congruenze rettilinee sia stato collocato a pag. 16 come relativo alla prima rettificazione di una curva dovuta a E. Torricelli; ma non possiamo a meno di lamentare che ciò sia accaduto, perchè nulla assicura che tal fatto non si sia ripetuto altre volte. E che cosa diremo ai compilatori per avere posto (p. 479) sotto la rubrica *Geometria projettiva* un lavoro sopra la « projezione gnomonica », evidentemente di pertinenza della geografia matematica?

Questi esempi (che potremmo agevolmente moltiplicare) abbiamo voluto segnalare, non per vano desiderio di critica, ma per porre sull' avvisato coloro che fossero propensi a ritenere la nuova pubblicazione della Società Reale di Londra di utilità ed importanza comparabili a quelle che indiscutibilmente possiede l'antico *Catalogue of scientific Papers,* e per dimostrare come essa non prova in alcun modo esser ormai superflua l'impresa, a cui ha dedicata la vita il Valentin. Il quale saprà certamente evitare i

Digitized by Google

difetti dianzi segnalati, di cui, a parer nostro, la radice va ricercata nella conoscenza troppo superficiale che avevano della materia le persone chiamate al compito delicatissimo di segnalare le differenze e le analogie esistenti fra circa 40 mila lavori.

***

Non meno ardua è la questione, che ora si affaccia, di pubblicare la Bibliografia valentiniana (chè il depositarla in una biblioteca al servizio del pubblico ne renderebbe l'utilità estremamente esigua, sproporzionata allo sforzo durato per comporla, mentre, d'altra parte, la esporrebbe a molteplici pericoli). Che tale questione sia ardua emerge dalla semplice considerazione che la stampa dei sei progettati volumi importerebbe la spesa di circa 90 mila Marchi, cioè 15 mila per volume, la quale si ridurrebbe a metà, se si adottasse il sistema più economico della riproduzione per mezzo della litografia. I tentativi fatti sinora presso qualche editore valsero piuttosto a porre in piena luce le difficoltà della pubblicazione, che a porgere i mezzi per superarle. Ora siccome è di interesse altissimo e generale che esse vengano sormontate, così è desiderabile che i matematici, con la concordia di cui diedero e continuamente danno prove luminose, si accordino per trovare i mezzi a ciò opportuni.

G. Eneström, il benemerito direttore della *Bibliotheca mathematica*, ha suggerito che il patronato dell'impresa venga assunto dalla Società matematica tedesca. Non v' ha dubbio che tale soluzione sia ottima; ma non è certo che i mezzi pecuniari di cui dispone quel sodalizio gli consentano di fornire all' editore della Bibliografia in discorso sufficienti garanzie finanziarie.

Un' altra via si presenta ed è che il V Congresso Internazionale dei Matematici, che fra pochi mesi si riunirà a Cambridge, faccia voti che della pubblicazione in discorso s'incarichi la Carnegie Institution; il solo fatto che un ente di tale potenza si assuma la responsabilità finanziaria dell' impresa basterà indubbiamente ad infondere coraggio negli editori finora ragionevolmente timidi. So che molti sono scettici intorno all' efficacia dei voti di Congressi, ma molti fatti dimostrano che non sempre riescono sterili e inefficaci; onde a me piace il pensare alla magnifica solenne prova di fratellanza che darebbero i cultori delle scienze esatte se, con una manifestazione fatta in Inghilterra, ottenessero che gli opulenti Stati Uniti d'America coronassero le trentennali fatiche di un erudito solitario vivente in Germania.

Genova, Gennaio 1912.

Digitized by Google

Meccanica razionale.

F. Castellano. — *Lezioni di meccanica razionale.* Seconda edizione, Torino 1911, pag. VIH + 462.

La prima edizione di questo libro venne in luce nel 1894, differenziandosi dagli altri trattati della stessa materia per il largo uso dei vettori. La teoria dei vettori data, come è noto, da Hamilton e Grassmann (1844), e i tentativi di applicazione scolastica furono molti. Ma le applicazioni alla meccanica erano sempre confuse, dando lo stesso nome e indicando collo stesso segno delle cose diverse. Il libro del prof. Castellano fu il primo in cui l'uso dei vettori fosse sistematico e didattico. Questa via nuova fu allora aspra e spinosa pel nostro autore, come sempre la via delle novità in mezzo al misoneismo costante della maggioranza del pubblico. Al giorno d'oggi queste teorie sono largamente diffuse per opera specialmente dei professori Burali-Forti, Marcolongo, Boggio, e di una numerosa schiera di giovani volenterosi, sorretti da provetti insegnanti. Benemerito perciò il precursore, che ben previde il futuro di questi nuovi metodi.

Oltre al carattere più appariscente dell'uso dei vettori, il libro era già fin d'allora pregievole per il rigore del ragionamento, cioè per l'applicazione costante alla Meccanica razionale, dei nuovi metodi di Calcolo infinitesimale, che si erano da una ventina di anni sviluppati per opera di valenti matematici italiani e esteri.

Nelle prime undici pagine, l'autore premette la teoria dei vettori di cui farà uso, e che sostituisce la geometria analitica degli altri trattati di meccanica. Il contenuto del libro è quello di un ampio trattato di Meccanica razionale, ad uso degli allievi della R. Academia militare, ove il prof. Castellano insegna. Questi allievi corrispondono per età e studii precedenti a quelli del terzo anno della facoltà matematica universitaria. Vi si contiene la cinematica fino al moto dei corpi rigidi, la dinamica d'un punto sollecitato da forze, la statica e la dinamica d'un sistema rigido, ecc.

La nuova edizione contiene alcuni perfezionamenti didattici, che la lunga pratica dell'insegnamento ha indicato all'autore.

G. Peano

Digitized by Google

La trottola.

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD, *Ueber die Theorie des Kreisels.* Leipzig B. G. Teubner; 1897, 1898, 1903, 1910. 8°. p. VIII+966. [Prezzo Mk. 5,60+10+9+8, leg. Mk. 6,60+11+10+9].

È trascorso ormai un anno dacchè usciva alla luce il quarto ed ultimo fascicolo di quest'opera insigne, alla distanza di quattordici anni dalla pubblicazione del primo. L'interesse destato da questo e dal piano generale dell'opera, quale era allora annunciato, non andò diminuendo malgrado gli intervalli, talvolta assai lunghi, che trascorsero fra la pubblicazione dei fascicoli successivi; anzi si accrebbe, in causa anche delle modificazioni e dell'allargamento ch'ebbe a subire il primitivo programma dei due illustri Autori. Secondo infatti la concezione originaria del libro, esso doveva fornire, su un esempio concreto fra i più notevoli, un saggio del come si debbano trattare i problemi meccanici, premettendo l'esposizione geometrico-intuitiva a quella analitica; doveva essere completato poi da un breve studio delle influenze perturbatrici dalle quali per solito si astrae nella meccanica teorica (attrito, resistenza del mezzo, elasticità del materiale, ecc.), e da qualche applicazione alla geofisica ed all'astronomia. Nel seguito invece queste ultime questioni assunsero un tale sviluppo ed una tale importanza da dare un'impronta tutt'affatto nuova all'opera, la quale ora si può dire costituita di due parti distinte: contenenti l'una la teoria vera e propria (capitoli I-VII), l'altra le applicazioni (capitoli VIII-IX).

Il contenuto della prima parte è ben noto, non solo ai cultori della meccanica, ma a tutti i Matematici in genere; il modo di esposizione originale, piano ed elegante; la compenetrazione delle teorie matematiche col soggetto meccanico, così attuato da far apparire costantemente l'impiego dell'analisi una necessità e non un lusso; il raffronto e la discussione dei diversi metodi, condotti sempre da un punto di vista elevato e con acuto spirito critico; la cura di mettere in rilievo gli elementi essenziali del fenomeno, che induce più d'una volta ad abbandonare la trattazione quantitativa per quella qualitativa; — tutte queste doti contribuirono a rendere la prima parte della " Theorie des Kreisels „ apprezzata e famigliare a quanti s'occupano di studii matematici.

Digitized by Google

Le applicazioni (astronomiche, geofisiche e tecniche) costituiscono, come già si disse, una parte a sè e sono meno note al pubblico matematico che la parte precedente, non solo perchè di più recente pubblicazione, ma anche perchè comprendono argomenti più speciali. Chi voglia trovare risultati o procedimenti nuovi non dovrà però cercarli nei paragrafi dedicati alle applicazioni astronomiche, ove compaiono problemi divenuti oramai classici; potrà invece trovarli fra le applicazioni geofisiche: le questioni ivi studiate, come i periodi delle nutazioni libere dell' asse terrestre e gli spostamenti dei poli, sono ancor lontane dall'aver ricevuto il loro assetto definitivo, onde si prestano ad ulteriori elaborazioni ed alla critica delle conclusioni a cui da varii Autori si pervenne. Un carattere notevolissimo ha poi il lungo Cap. IX, dove si espongono le applicazioni tecniche, e che contiene una materia molto diversa da quella che è oggetto delle ordinarie opere di meccanica analitica. Tutto il Cap. ha la sua origine nella proprietà di essere stabili, che hanno certi movimenti di un solido pesante con un punto fisso. Accanto all' analisi delle azioni stabilizzatrici che si manifestano in alcuni meccanismi, in quanto sono paragonabili schematicamente, nel loro complesso od in alcuna loro parte, ad un giroscopio (ferrovie ad una rotaia, bicicletta, turbina ad asse flessibile di Laval, ecc.), trovano posto in questo Cap. le descrizioni di apparecchi giroscopici studiati in base alle teorie svolte nella prima parte dell'opera, e destinati a produrre, mediante il loro potere stabilizzatore, determinati effetti. Citiamo fra le più importanti di queste applicazioni, aventi uno scopo decisamente pratico, gli apparecchi con cui si assicura il movimento rettilineo delle torpedini lanciate dalle navi da guerra; l'apparecchio di Schlick che attenua il movimento di rullio nelle navi; la bussola giroscopica, il cui funzionamento è indipendente dalle azioni magnetiche.

Poichè è negli Autori l' intenzione dichiarata di rivolgersi ad una cerchia possibilmente larga di lettori, le conoscenze matematiche, che in questi vengono presupposte, si riducono al minimo. Le teorie occorrenti alla comprensione del soggetto sono svolte di mano in mano che se ne presenta la necessità; per modo che lo studio dell'opera può anche giovare a chi desideri di completare la sua coltura o collo spingersi al di là degli elementi della meccanica teorica, oppure coll'apprendere alcuni fra i più importanti capitoli della teoria delle funzioni.

Digitized by Google

Passiamo ora ad esaminare un po' più dettagliatamente il contenuto della « Theorie des Kreisels ».

*
* *

L'esempio, sul quale i sigg. Klein e Sommerfeld si propongono di mostrare come si possa trattare, sotto tutti i suoi aspetti, un problema meccanico, è costituito dal moto di un solido pesante, simmetrico (nel senso meccanico) rispetto ad un asse, con un punto di questo fisso nello spazio. Come modello atto a realizzare nel modo più comodo il corpo ideale, di cui si vuole studiare il movimento, fu assunta la trottola comune *(Kreisel)*, quando si supponga che la punta non possa muoversi liberamente sul terreno, ma rimanga ferma.

Il Cap. I contiene l'introduzione cinematica alla teoria; e poichè nella cinematica la distribuzione delle masse ha un'importanza secondaria, vien fatta senz'altro astrazione dalla simmetria della trottola: di modo che quanto è esposto nell'intero Cap. (ad eccezione di un § dedicato ad un caso particolare) vale per un qualunque solido con un punto fisso. Ai soliti preliminari geometrici, compresa la definizione dei coni di Poinsot, fanno seguito le generalità analitiche, nelle quali è da notarsi il triplice modo di assegnare la posizione del solido rispetto a tre assi fissi: dapprima mediante gli angoli di Eulero, specialmente adatti per lo studio meccanico del problema; poi con quel sistema di quattro quantità complesse che si possono chiamare parametri di Klein, e che si prestano meglio allo studio analitico; infine con un sistema di quattro quantità reali, interpretabili come componenti di un quaternione, che conferiscono ai calcoli una grande simmetria. Oltre alla parte generale il Cap. contiene un § rivolto all'esame approfondito della precessione regolare della trottola simmetrica, con una classificazione dei varii tipi di precessioni in base al modo come sono situati l'uno rispetto all'altro i due coni poloide ed erpoloide; ed un altro § che è come una scorsa sulla teoria dei quaternioni, con speciale riguardo al significato geometrico del quaternione, e collo scopo di meglio chiarire l'importanza dei quattro parametri quaternionali a cui si accennò poc'anzi.

Col Cap. II si entra nel dominio della Dinamica. Posti a base delle considerazioni meccaniche i concetti di forza e di lavoro, come quelli che meglio si prestano alla concezione viva dei feno-

Digitized by Google

meni e ad una rapida orientazione nelle questioni speciali, si distingue anzitutto fra forza continua e forza d'urto (momentanea), per introdurre, mediante quest'ultima, un elemento importantissimo: l'*impulso*, che permette di enunciare i fatti meccanici in una forma particolarmente semplice e intuitiva. La definizione d'impulso, applicata ad un solo punto, dà l'ordinaria quantità di moto; applicata ad un solido con un punto fisso dà la coppia di quantità di moto: sia nell'un caso che nell'altro è rappresentabile con un vettore. Questa analogia fa sì che certe proposizioni della meccanica del punto si possano trasportare integralmente alla meccanica del solido con un punto fisso, e quindi quest'ultima appaia, sotto un certo aspetto, come l'immediata estensione della prima. P. es., se si tratta di un solo punto, l'impulso si mantiene costante quando mancano le forze esterne (legge d'inerzia); — si compone in ogni istante, secondo la regola del parallelogramma, coll'impulso proveniente dalle forze esterne, quando queste non sono nulle: questi principî valgono ancora alla lettera, sostituendo ad un punto un solido con un punto fisso.

Il vettore d'impulso è in stretta relazione, pel tramite della forza viva, col vettore di rotazione istantanea. Bisogna però evitare di confonderlo con quest'ultimo, come si vede nello studio della stabilità di un solido posto in rapida rotazione intorno ad un asse: se difatti si vuole studiare la stabilità colla considerazione degli effetti prodotti dalle perturbazioni esterne, si deve riflettere che queste agiscono direttamente sull'impulso, non già sulla rotazione istantanea.

Tutto quanto occorre per la trattazione analitica del moto di un solido con un punto fisso è stabilito nel Cap. III. Le equazioni di Eulero, dedotte dalle proprietà dell'impulso, vengono integrate nel caso del solido non soggetto a forze, e sono poste in relazione con quelle di Lagrange. Il principio di d'Alembert è esposto e ben precisato nel suo significato a proposito dei movimenti che si possono far compiere *forzatamente* al solido, e delle resistenze dovute alla sua inerzia. In particolare, se si considera una trottola simmetrica e la si trascina, ad es. colla mano, in modo che eseguisca una precessione regolare, la resistenza totale si decompone in due, di cui una (*resistenza di deviazione*) dipende soltanto dallo spostamento del vettore d'impulso. L'esame dettagliato di questa resistenza, condotto anche da un nuovo

Digitized by Google

punto di vista, porta al teorema di Coriolis. Il Cap. si chiude con un interessante §, nel quale l'esistenza effettiva della resistenza di deviazione è dimostrata colla descrizione di varie esperienze su solidi con uno o due gradi di libertà.

Ed eccoci al Cap. IV, col quale si intraprende in tutta la sua estensione lo studio del particolare sistema a cui s'intitola il libro. Dapprima gli Autori studiano con metodo geometrico il moto della trottola simmetrica, rivolgendosi all'intuizione senza preoccuparsi troppo del rigore; essi tengono dietro sopratutto ad un punto dell'asse, rappresentandone la traiettoria in proiezione stereografica, e ordinando tutti i casi possibili fra alcuni semplicissimi, come la precessione regolare già ricordata ed il moto pendolare. In ciò fanno uso di un principio di continuità, secondo il quale variando continuamente le condizioni iniziali varia pure continuamente il movimento della trottola.

A questo primo studio d'orientazione segue l'esposizione analitica. Si trovano così le classiche formole che risolvono il problema mediante integrali ellittici, i quali permettono di constatare il carattere periodico del movimento. Coll'aiuto di quelle formole si verifica come sia possibile uno stesso movimento per trottole differenti: in particolare, come il moto d'una trottola simmetrica si possa sempre ricondurre a quello d'una trottola sferica, cioè coi tre momenti d'inerzia uguali. Come criterio per la classificazione dei diversi moti si assumono i valori delle varie costanti che caratterizzano il sistema: si è così condotti ad una certa distinzione essenziale fra la trottola *forte* e la trottola *debole*, che poggia sul modo di comportarsi della proiezione ortogonale dell'impulso sulla verticale.

Molto istruttivi sono i due ultimi §§ del Cap., dedicati il primo al calcolo numerico degli integrali ellittici che risolvono il problema, ed il secondo al calcolo della traiettoria di un punto dell'asse della trottola, condotto in via approssimata, ma con valutazione rigorosa dell'errore.

Il Cap. V è uno dei più densi e suggestivi dell'opera, sopratutto in causa delle questioni di stabilità dinamica che vi sono discusse. Ciò che dà occasione a tali discussioni è l'analisi dettagliata di alcuni movimenti particolari della trottola, segnatamente di quello che gli Autori chiamano *precessione pseudoregolare*. Si ha questo movimento tutte le volte che l'impulso iniziale è molto grande e prossimo all'asse della figura, ed allora si può consi-

Digitized by Google

derarlo, in via di approssimazione, come la sovrapposizione di una precessione regolare e di una nutazione di ampiezza piccolissima. Sarebbe, insomma, il moto più comune della trottola, in quanto vien lanciata solitamente in modo da attuare le condizioni suddette relative all' impulso; e questo spiega il noto paradosso che, mentre si crede volgarmente che la precessione regolare sia il moto più generale della trottola, invece non può presentarsi che in condizioni particolarissime. Le piccole nutazioni che accompagnano la precessione regolare e che costituiscono, dal punto di vista meccanico, la parte più sostanziale del fenomeno, sfuggono all' osservazione superficiale non solo in causa della loro limitata entità, ma anche perchè sono attenuate da varie cause accessorie, come l'attrito, la resistenza del mezzo, ecc.

Un altro movimento particolare, del quale viene pure studiata la stabilità, è quello della trottola eretta, cioè coll'asse verticale: tanto in questo esempio quanto in quello che precede è messa bene in luce l'influenza stabilizzatrice della velocità di rotazione.

Già nei casi particolari ora accennati s'era reso manifesto che la definizione di stabilità data da Routh non si poteva sempre accettare. Secondo il Routh un movimento è stabile quando con una perturbazione arbitraria ma piccola si ottiene un moto, nel quale le coordinate differiscono *durevolmente* di poco dalle corrispondenti nel moto originario. Ora l'applicazione pura e semplice di questa definizione, anche allargata col sostituire alla differenza delle coordinate la distanza dei punti, conduce ad assurdità evidenti, come quella di classificare fra i moti instabili ogni precessione regolare, oppure il moto rettilineo uniforme di un punto. Un maggiore allargamento si avrebbe sostituendo, alla considerazione di un intervallo qualunque di tempo, quella di un intervallo limitato; ma allora si cade nell' inconveniente opposto: si verrebbero a classificare fra i moti stabili dei moti che ragionevolmente non lo sono. Gli Autori sono così indotti a modificare fondamentalmente la definizione di Routh, chiamando stabile un moto, se coincide col limite a cui tende il moto dovuto ad una qualunque variazione dell' impulso, quando si faccia tendere a zero questa variazione. È questo, in sostanza, il criterio di stabilità che fu applicato in principio del Cap. alla precessione regolare e poi al moto eretto della trottola: i risultati allora ottenuti dimostrano quanto la nuova definizione sia atta a tradurre il vero concetto di stabilitá.

Digitized by Google

Non ci fermeremo neppure sulle varie distinzioni che si possono fare in ordine alla stabilità da diversi punti di vista; come anche ricorderemo appena due paragrafi dedicati l'uno al criterio energetico per la stabilità, e l'altro al metodo delle piccole oscillazioni.

Il Cap. contiene ancora un'esposizione critica di varî tentativi di spiegazione elementare dei movimenti della trottola, tentativi generalmente affetti da errori; ed un breve riassunto delle ricerche più moderne sul moto generale di un solido con un punto fisso.

Nel Cap. VI gli Autori si propongono di risolvere in tutta la sua completezza il problema della trottola simmetrica per via analitica, col mezzo delle funzioni ellittiche. In realtà il Cap. è una vera e propria introduzione alla teoria delle funzioni ellittiche, che ha sulle ordinarie esposizioni il vantaggio di presentarne non soltanto la bellezza astratta, ma anche l'utile impiego che se ne può fare nelle questioni concrete. Partendo dalla formula, stabilita precedentemente, che esprime il tempo mediante un integrale ellittico, se ne fa anzitutto l'inversione, attraverso la costruzione di una superficie di Riemann a due fogli; si giunge in tal modo ad esprimere i parametri di Klein, definiti fin dal Cap. I, come quozienti di funzioni θ moltiplicati per un esponenziale; colle stesse funzioni si rappresentano pure la traiettoria di un punto dell'asse, la poloide e l'erpoloide; col loro mezzo inoltre s'insegna come si possa procedere al calcolo numerico degli elementi del moto. Accanto alla trottola pesante viene studiato il movimento d'un solido qualunque, non soggetto a forze, intorno ad un punto fisso *(moto alla Poinsot)*. Lo strumento analitico che serve al calcolo dei parametri di Klein è ancora costituito dalle funzioni θ; dai parametri di Klein si passa poi immediatamente all'espressione dei nove coseni come funzioni uniformi del tempo. Fra le molte proprietà dei moti alla Poinsot una è contenuta in un teorema di Jacobi, secondo il quale è possibile rappresentare il moto della trottola pesante mediante due moti alla Poinsot coniugati, cioè colle velocità di rotazione in ogni istante uguali ed opposte: è un teorema ben noto, che fu studiato e dimostrato per vie diverse da varî Autori (Halphen, Routh, Darboux, ecc.).

La dinamica della trottola viene ripresa successivamente da un secondo punto di vista, scrivendo le equazioni del 2° ordine

Digitized by Google

di Lagrange per i parametri di Klein, e mostrando come queste equazioni (del tipo delle equazioni di Lamé che ammettono degli integrali uniformi) si integrino per mezzo di funzioni doppiamente periodiche di seconda specie e di primo grado; il calcolo fatto è un'estensione di quello che fece Hermite pel pendolo sferico, e la soluzione ottenuta mette in evidenza la proprietà che il movimento della trottola si può identificare con quello del pendolo sferico nello spazio a quattro dimensioni.

Il Cap. contiene, a guisa d'appendice, l'analisi del moto d'una trottola, la cui punta possa spostarsi liberamente su un piano orizzontale. Per semplificare però la questione, gli Autori si occupano specialmente dell'analogo della precessione pseudoregolare, limitandosi a formule approssimate, che riducono gli integrali iperellitici del caso generale a integrali di tipo elementare. Che l'approssimazione attuale del resto sia più che soddisfacente, è comprovato da un esempio numerico, nel quale gli errori sono accuratamente valutati.

La parte puramente teorica va ora volgendo al suo termine; essa si chiude col Cap. VII, che, pur costituendo nel suo insieme un capitolo di teoria, contiene già idee e metodi appartenenti al campo della meccanica applicata. Descritte in alcune pagine brillanti le differenze che passano fra meccanica razionale ed applicata, e spiegatene le ragioni, gli Autori si propongono di studiare brevemente quali influenze esercitino sulla trottola in movimento le principali fra quelle cause che i teorici scartano sistematicamente qualificandole di secondarie, ma che sono in realtà, o possono diventare, di primaria importanza: attrito, resistenza dell'aria, elasticità della trottola e del sostegno.

Cominciando dall'attrito, se ne espongono e se ne discutono le leggi sperimentali, facendo notare quanto siano tuttora incerte e come convenga quindi attenersi nei calcoli ad una opportuna approssimazione, piuttosto che prefiggersi una precisione assoluta, che rimarerebbe senza scopo. Colla guida di questi principî viene studiato dapprima per via intuitiva ed in modo qualitativo un fenomeno dei più curiosi della trottola, dovuto esclusivamente all'attrito: il raddrizzamento dell'asse. Lo studio quantitativo è pure soltanto approssimato, e condotto con un originale metodo grafico; a rendere più tangibili i risultati giova un esempio numerico, nel quale si calcola il tempo impiegato per il raddrizzamento completo della trottola a partire da una certa inclinazione sulla verticale.

Digitized by Google

Si tien conto della resistenza dell' aria ammettendo che dia luogo ad una forza di rotazione opposta alla rotazione istantanea e ad essa proporzionale. Considerando allora un solido non soggetto a forze, si trova che la rotazione va continuamente smorzandosi, ed il suo asse va accostandosi, in ogni caso, ad un asse di massimo momento d' inerzia. Passando ad un solido pesante, il fenomeno si presenta sotto una forma molto semplice nell' ipotesi che sia sferico, in quanto l' asse della figura tende a cadere; le cose riescono notevolmente più complicate nella trottola non sferica.

L'elasticità della trottola viene studiata supponendo che quest' ultima abbia la forma di un ellissoide schiacciato, ad ellitticità piccolissima. Calcolata la ellitticità della trottola deformata, si trova fra l' altro il notevole risultato, che la sua variazione non ha alcuna influenza sul periodo della parte precessionale del moto, e quindi è la stessa come se la trottola fosse rigida.

Effetti più sensibili produce l'elasticità del supporto, al quale si sostituisce, per semplificare il calcolo, un punto con una massa conveniente, che oscilli lungo la verticale. Le vibrazioni del supporto indeboliscono le nutazioni dell'asse della trottola, mentre il moto di questa reagisce, dal canto suo, sulle oscillazioni naturali del supporto, alterandone il periodo e lo smorzamento. In complesso tutti questi elementi tendono ad estinguere le vibrazioni dell' asse della trottola: cosa a cui tende pure l' attrito; per cui due cause dissipative diverse cooperano all' effetto di semplificare il movimento.

Termina il Cap. una discussione puramente qualitativa del moto di una trottola su un piano orizzontale che presenti attrito. Dall' esperienza diretta si desume che il moto è in ogni istante simile ad una precessione regolare, e che le traiettorie del punto d'appoggio e del baricentro sono spirali colle spire press'a poco circolari. La discussione, necessariamente incompleta, sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale, mostra come possano presentarsi varî casi, fra i quali uno comprende come caso particolare quello già visto, del raddrizzamento della trottola nell' ipotesi che la punta debba rimanere fissa.

*
* *

Le applicazioni propriamente dette, di cui andremo ora ad occuparci, sono contenute nei Cap. VIII e IX, i due ultimi del

Digitized by Google

libro. Le applicazioni astronomiche consistono in sostanza nel presentare una spiegazione della precessione e della nutazione astronomica, fondata sulla teoria della trottola, e quindi più adatta ad essere compresa dalla generalità dei lettori, che non le ordinarie spiegazioni fornite dagli astronomi. Si ricorre perciò ad un procedimento impiegato da Gauss per studiare le perturbazioni secolari delle traiettorie dei pianeti, che consiste nell'immaginare non già il pianeta perturbatore mobile sulla sua traiettoria, ma la sua massa distribuita lungo la traiettoria stessa con densità conveniente. Così, volendo spiegare la precessione degli equinozi, si comincierà col distendere le masse del Sole e della Luna sulle loro orbite. Si passerà poi a semplificare le condizioni del problema, sostituendo alla Terra un corpo sferico circondato all' equatore da un anello, e astraendo dall' inclinazione della traiettoria della Luna sull' eclittica. Dedotta allora, sempre in via approssimata, la forza di rotazione che si esercita sulla Terra da parte del Sole e della Luna, non resta che verificare se la precessione regolare sia compatibile con quella forza: la verifica, eseguita col calcolo numerico della velocità precessionale, dà un risultato affermativo.

L' ipotesi semplificativa che la traiettoria della Luna stia nel piano dell'eclittica, va naturalmente abbandonata quando si voglia spiegare il regresso dei nodi lunari. Inoltre, per studiare questo movimento, che è dovuto all' attrazione del Sole e della Terra sulla Luna, si procede ad un' estensione del metodo di Gauss accennato dianzi, cioè si suppone che la massa lunare non solo sia distribuita lungo un anello (circolare), ma che questo sia mobile in sè stesso. Fra le varie caratteristiche dell'attuale fenomeno si ritrova pure che l' attrazione del Sole è notevolmente preponderante rispetto a quello della Terra.

Quanto alla nutazione astronomica dell' asse terrestre, gli Autori cominciano col far notare la sua diversità, dal punto di vista dinamico, dalle ordinarie nutazioni della trottola; mentre difatti queste ultime sono *libere,* perchè dovute alla distribuzione della massa e alle condizioni iniziali, le prime sono invece *sforzate*, perchè provenienti dall' attrazione della Luna. Lo studio della nutazione astronomica è fatta ancora col metodo di Gauss, ulteriormente esteso alle perturbazioni periodiche. Si considera cioè la zona di superficie sferica descritta dalla traiettoria della Luna nel suo moto precessionale, e su questa zona si imagina

Digitized by Google

distribuita la massa lunare in modo opportuno. Il calcolo svolto su questi principî, fornisce con buona approssimazione tutti gli elementi dell' ellisse di Bradley.

La questione se, oltre alle nutazioni sforzate di cui si parlò poc'anzi, non vi siano pure delle nutazioni libere che si sovrappongono alla precessione regolare della Terra, ci introduce alle applicazioni geofisiche. L' esistenza di queste nutazioni libere si può prevedere e mettere in sodo in via puramente teorica, pel fatto che l' asse terrestre non coincide esattamente coll' asse di rotazione istantanea. Quest' ultimo varia nello spazio e nella Terra, dando luogo a due coni, erpoloide e poloide, entrambi di rivoluzione: a descrivere il primo, che ha un'apertura piccolissima, impiega un pò meno di un giorno sidereo; a descrivere il secondo, la cui apertura è 305 volte più grande, impiega circa dieci mesi. È questo il cosidetto *periodo* o *ciclo euleriano*. Il metodo di Poinsot mette dunque bene in chiaro la differenza geometrica fra la nutazione libera e quella sforzata, nella quale ultima è invece il cono erpoloide molto più grande del poloide; l' asse istantaneo di rotazione descrive l' erpoloide in 26.000 anni, ed il poloide in un giorno.

Le osservazioni dirette, compiute negli ultimi vent'anni sulla variazione della latitudine in varî punti della superficie terrestre, non riuscirono, come è noto, a constatare il periodo euleriano di dieci mesi. Per contro, una figura, che fu disegnata dall'Albrecht in base a risultati sperimentali e che mostra il il movimento del polo dal 1890 al 1898, fa vedere anzitutto che la traiettoria del polo non è un cerchio, ma presenta, specialmente in alcuni tratti, una forma piuttosto irregolare; inoltre, ed è questo il fatto piú saliente, mette in vista non già un periodo di dieci mesi, ma un altro di quattordici: quel periodo cioè che fu scoperto da Chandler sulla scorta di un copioso materiale di osservazione. L' irregolarità della figura dice però che il moto del polo non si può rappresentare con un solo periodo. Per rintracciare gli altri periodi gli Autori deducono, con un ingegnoso metodo grafico, da quella prima figura una seconda, che rappresenta ancora il moto del polo, dal quale sia eliminato il periodo principale. La nuova figura è anche piú irregolare della precedente; tuttavia non è difficile riscontrarvi un periodo di un anno: in realtà un tale periodo era già stato segnalato dallo stesso Chandler. Applicando alla nuova figura lo stesso metodo

Digitized by Google

grafico di prima, se ne ottiene una terza, nella quale i due primi periodi non compaiono più, ed è più complicata ancora delle due prime: questa figura però non è più attendibile sul serio, come del resto è già poco sicura quella che rivela il periodo di un anno.

Come si possono spiegare i due periodi di 14 e 12 mesi? La spiegazione del primo va ricercata nella elasticità della Terra: all' ipotesi della sua assoluta rigidità corrisponderebbe difatti, come dimostrò il Newcomb, il ciclo euleriano di 10 mesi, mentre al periodo osservato di 14 mesi si può far corrispondere un determinato coefficiente di elasticità, un pò minore di quello dell' acciaio. Gli Autori ricavano questi risultati riferendosi alla teoria, svolta nel Cap. che precede, sulla trottola elastica. Siccome però in un corpo delle dimensioni della terra non è lecito trascurare le azioni dovute alla gravitazione, così la questione vien trattata attraverso a quattro problemi. Nel primo si trova l'ellitticità di una massa fluida, omogenea ed incompressibile, originariamente di forma sferica, sotto l'azione della gravitazione mutua delle sue particelle, che ruota intorno ad un asse assumendo la forma di un ellissoide schiacciato. Nel secondo la sfera si suppone elastica invece che fluida; nel terzo vien supposta ad un tempo elastica e fluida; ed infine nel quarto si determina l'ellitticità che assume un ellissoide schiacciato fluido ed elastico quando la rotazione cessi.

Le fluttuazioni del polo a periodo annuale sembrano originate da movimenti di masse entro il corpo terrestre: segnatamente dalle variazioni di pressione atmosferica, molto sensibili, che si hanno tra l' estate e l' inverno, e dalle correnti marine. Tali trasporti di massa possono avere sul moto della Terra un' influenza *indiretta* e una *diretta*: possono cioè far variare l' asse di rotazione terrestre sia mutando la distribuzione delle masse nella Terra e quindi alterando gli assi principali d' inerzia, sia alterando l' impulso totale del moto. Queste due influenze vengono studiate gradatamente in tre problemi. Si studia in primo luogo come varia, per un trasporto di masse, l' asse d' inerzia polare della Terra; in secondo luogo come varia l' asse di rotazione nell' ipotesi che non varîno gli assi principali d' inerzia; infine come si compongono i due effetti precedenti, considerando in pari tempo l' influenza diretta di un trasporto di masse sull' impulso. Fra i trasporti di masse che avvengono senza altera-

Digitized by Google

zione dei momenti d' inerzia sono particolarmente interessanti quelli *ciclici*, più specialmente quelli dei quali è costante rispetto al corpo terrestre l' impulso: sono i movimenti studiati nei noti lavori del Volterra. Tutto sommato, tenendo conto dei calcoli numerici in applicazione dei problemi precedenti, si ha fondato motivo per ritenere che i trasporti di masse dovuti a cause meteorologiche possano fornire, quando si potrà disporre di un materiale d' osservazione più ricco, una spiegazione soddisfacente delle fluttuazioni annuali del polo.

La teoria della trottola viene da ultimo utilizzata a spiegare le esperienze di Foucault e di Gilbert comprovanti la rotazione della Terra: del primo è studiato il notissimo *giroscopio,* a tre oppure a due gradi di libertà; del secondo il *barogiroscopio,* che è in sostanza l'apparecchio di Foucault perfezionato in modo da eliminare gli errori dovuti ai difetti di centratura del nucleo principale.

Lo sforzo costante degli Autori, di rendere l'esposizione accessibile ad un pubblico più largo di quello a cui ordinariamente si rivolgono gli scrittori di Meccanica teorica, si accentua anche di più nel Cap. IX, che comprende le applicazioni tecniche. Questo Cap. anzi potrebbe quasi esser letto senza l'aiuto delle parti precedenti, poichè vi è ridotto al minimo quanto occorre di teoria per la sua comprensione, ed è studiato di nuovo, in modo sommario e con speciale riguardo alle circostanze particolari che ora interessano, il principio dell' impulso enunciato in generale al Cap. II. Considerando allora una trottola pesante simmetrica, le formole rilevano subito nel modo più semplice il fenomeno, a tutti noto, della tendenza di un tale sistema ad orientarsi in una determinata direzione, quando alla trottola s' imprima una rotazione velocissima intorno al suo asse.

Questa tendenza, ossia questa resistenza che la trottola offre alle azioni deviatrici, esige però, come mostrano ancora le formole, che al sistema vengano lasciati tre gradi di libertà; se il grado di libertà del sistema si riducesse a due, non potrebbero esplicarsi quelle azioni giroscopiche da cui deriva appunto il suo potere stabilizzatore.

Un primo esempio, nel quale il movimento della trottola è studiato con intenzioni pratiche, ci è fornito dalle *vetture ferroviarie* in corsa. La trottola sarebbe costituita da una delle sale, insieme colle due ruote terminali e con quella parte del peso della vet-

Digitized by Google

tura che la sala deve sopportare. Le azioni giroscopiche intervengono ogniqualvolta l'asse della sala subisce una deviazione: in particolare quindi nelle curve. Esse vengono studiate dapprima nell'ipotesi che le due rotaie si trovino al medesimo livello, e poi nell'ipotesi che la rotaia esterna sia rialzata: si trova che si sommano coll'azione della forza centrifuga, e non sono punto trascurabili quando la velocità del treno oltrepassa un certo limite, in quanto che la loro influenza si può ritenere proporzionale al quadrato della velocità. Queste conclusioni sono suffragate da esperienze compiute in Germania su ferrovie elettriche rapidissime: per velocità prossime ai 150 km. all'ora le azioni giroscopiche cominciano a diventare pericolose. Dalla loro analisi si possono poi dedurre i criterii tecnici per ridurle al minimo.

Ma le azioni stabilizzatrici della trottola sono quelle che si prestano alle applicazioni pratiche più interessanti. Citiamo subito l'*apparecchio di Obry,* che assicura la marcia rettilinea delle torpedini, delle quali gli Autori fanno una descrizione schematica nei due tipi di Whitehead e di Howel: nel primo tipo l'apparecchio di Obry agisce più che altro da registratore delle deviazioni della torpedine, mentre il lavoro necessario per correggere la traiettoria viene fornito da una massa d'aria fortemente compressa; nel secondo tipo invece è lo stesso apparecchio di Obry che regola la marcia.

Dal perfezionamento delle macchine di distruzione passiamo ad un'altra applicazione della teoria della trottola, la cui importanza sarà anche più immediatamente e generalmeute sentita: essa è costituita dall'*apparecchio di Schlick,* il cui scopo è di sopprimere, o per lo meno ridurre, il rullio delle navi. Un primo tentativo di questo genere fu fatto dall'ingegnere inglese Bessemer verso il 1870, ma senza risultato utile, perchè impiegava una trottola con due soli gradi di libertà. Solo recentemente (1903) il problema si potè dire risolto per opera di Schlick, il cui apparecchio fu già applicato ad alcune navi tedesche ed inglesi. La sua parte essenziale è una ruota molto pesante animata da fortissima velocità rotatoria, che costituisce, insieme con un telaio a cui è appesa, e alla nave, un giroscopio completo. Le oscillazioni laterali della nave non vengono già eliminate senz'altro dal moto della trottola, bensì sono trasformate in un moto oscillatorio del telaio rispetto alla nave; questo moto allora si arresta con un potente freno a nastro, di modo che in definitiva l'energia

Digitized by Google

dell'onda che colpisce il fianco della nave si trova trasformata in calore: ecco il principio su cui è fondato l'apparecchio di Schlick. La sua teoria esige che se ne studii separatamente l'influenza sulle oscillazioni libere della nave, cioè dovute ad una prima spinta, e sulle oscillazioni sforzate, dovute al continuo succedersi delle onde. Tanto le prime quanto le seconde sono descritte da due sistemi di equazioni differenziali lineari del 2° ordine a coefficienti costanti, la cui integrazione riesce quindi immediata. Entrambi questi sistemi rappresentano un accoppiamento di oscillazioni come se ne trova in varii altri campi della fisica: basti citare il fenomeno noto sotto la denominazione di " effetto Zeeman ". La discussione successiva mostra anzitutto che le oscillazioni sforzate si possono ridurre o colle sole azioni giroscopiche dell'apparecchio o coll'impiego del freno a seconda della frequenza delle onde; dimostra poi che il freno ha un'azione preponderante nello smorzamento delle oscillazioni libere: il suo effetto del resto è più o meno utile in dipendenza dall'intensità del frenamento e dalla velocità della ruota centrale.

La teoria è appoggiata da varii dati numerici desunti da esperienze dello stesso Schlick. Alcuni inconvenienti che la teoria fa prevedere (come l'aumento del beccheggio in seguito alla diminuzione del rullio) vengono riconosciuti, col mezzo di calcoli numerici, praticamente trascurabili. Rimane da attendere che la tecnica di questo apparecchio e delle costruzioni meccaniche in genere si perfezioni ulteriormente, per eliminare le ultime difficoltà, che si possono riassumere, in ultima analisi, in una spesa troppo alta.

Di grande interesse per la navigazione è pure la *bussola giroscopica*. Già Foucault aveva espresso l'idea di utilizzare l'azione del movimento terrestre sul suo apparecchio, per servirsi di quest'ultimo come di bussola di direzione. La questione si presenta ai giorni nostri della massima importanza, sopratutto nella marina da guerra, ove le grandi masse d'acciaio mobili delle navi rendono la bussola magnetica di impiego molto difettoso. Dopo varii tentativi riuscì alla casa Anschütz-Kämpfe di Kiel di costruire una bussola fondata esclusivamente sulle proprietà meccaniche della trottola; anche qui il nucleo principale è una ruota mantenuta in rotazione velocissima da un motore elettrico. L'apparecchio è congegnato in modo da costituire insieme colla Terra un tale sistema, che l'indice dell'apparecchio sia rivolto costan-

Digitized by Google

temente verso una direzione fissa o per lo meno compia delle piccole oscillazioni intorno ad una siffatta direzione. La bussola di Anschütz-Kämpfe è impiegata con ottimi risultati nelle marine da guerra tedesca, inglese ed austriaca; alla sua diffusione anche nella marina mercantile si oppone però lo stesso ostacolo che per l'apparecchio di Schlick: il costo elevato, dovuto alle gravissime difficoltà di costruzione.

Accanto ai meccanismi, costruiti di proposito in applicazione della teoria della trottola, val la pena di accennare a qualcun altro in cui le azioni giroscopiche intervengono indipendentemente dall'intenzione dei costruttori ed in misura soltanto secondaria. Un tale cenno è utile, da un lato, per dimostrare il vasto campo d'applicazione di quella teoria, e dall'altro per mettere in guardia contro possibili errori nei tentativi di spiegazione di certi fenomeni. Così p. es., se nella *bicicletta*, la cui teoria è notissima, è facile rintracciare azioni giroscopiche stabilizzatrici di entità non trascurabile, sarebbe tuttavia un errore il farvi un eccessivo assegnamento per il mantenimento dell'equilibrio; — se quelle stesse azioni intervengono nella *turbina di Laval* (la quale permette di ottenere, col suo asse flessibile, velocità rotatorie enormi senza che l'asse si spezzi), sono però così deboli, da doversi piuttosto ricercare la spiegazione della tendenza dell'asse, a portarsi nella sua posizione d'equilibrio dinamico, in un fenomeno di risonanza dovuto all'elasticità dell'asse.

Egualmente istruttive in questo senso sono infine quelle svariate applicazioni alle quali gli Autori dedicano l'ultimo § del libro: l'esposizione è un pò sommaria e sovente incompleta, trattandosi di meccanismi studiati appena negli ultimi anni, sul cui funzionamento non si può ancora dire una parola definitiva. Si trovano in queste condizioni le *ferrovie ad una rotaia*, che raggiungono velocità impressionanti, e nelle quali la stabilità è senza dubbio mantenuta dalle azioni giroscopiche: vi sono anzi due tipi recenti (brevetti Brennan e Scherl 1909), nei quali le vetture son provviste di apparecchi analoghi, verosimilmente, all'apparecchio di Schlick per le navi; — come pure l'*orizzonte giroscopico*, ideato da un ufficiale della marina francese, che permette di determinare il piano orizzontale a bordo d'una nave, quando non si scorga l'orizzonte in causa di nebbie od altro: apparecchio discretamente preciso, ma richiedente una lunga pratica per potersi adoperare.

Digitized by Google

Come si vede, la navigazione ha fornito un largo campo d'applicazioni alla teoria della trottola: a quelle già ricordate possiamo ancora aggiungere le azioni giroscopiche nei *vapori a turbine*, punto trascurabili, e provocate sia dal beccheggio sia dall'azione del timone; — e quelle che si hanno nei *vapori a ruote*, debolissime per la scarsa forza viva delle ruote, ma interessanti storicamente, perchè fornirono a Schlick l'idea pel suo apparecchio. Ed oltre che della navigazione acquea si potrebbe parlare della navigazione aerea, se non fosse che su questo punto non si possiedono ancora elementi abbastanza sicuri per ricavarne una teoria attendibile.

Accenniamo piuttosto, terminando, all'incursione che gli Autori fanno nel campo della *balistica*, per studiare come avvenga l'accoppiamento della dinamica dei solidi colla dinamica dei fluidi compressibili quando si voglia analizzare l'influenza della resistenza dell'aria sul moto del proiettile. Questo studio dà il mezzo di discutere e spiegare varii fatti sperimentali ben noti, quali l'esistenza di un momento per la resistenza dell'aria e la possibilità di determinarne il senso, la stabilizzazione dei proiettili mediante le canne rigate e la loro deviazione laterale (derivazione). D'altra parte lo studio della resistenza dell'aria dal lato esclusivamente idrodinamico porge l'occasione ad un raffronto fra quel fenomeno (fissato fotograficamente da E. Mach, dal quale prende il nome), in cui le onde aeree, eccitate dal moto del proiettile, accompagnano quest'ultimo tutte le volte che la sua velocità è maggiore della velocità normale del suono, — e quello della resistenza che incontra, conformemente alle moderne vedute, una carica elettrica (elettrone) in moto.

In tal maniera, con un ritorno alla teoria pura, si chiude il ciclo degli argomenti esposti nella « Theorie des Kreisels ». Ed il principio informatore di tutta l'opera, per cui il lettore è continuamente trasportato in campi che trascendono dal semplice problema meccanico del solido con un punto fisso, è ancora quello che inspira agli Autori le ultime linee: dove è constatata l'attuale insufficienza della Meccanica classica a spiegare i fenomeni della natura ed a valutare le forze che in essi entrano in giuoco; ed è affermata la necessità di ricorrere ai mezzi ben più potenti che le recenti teorie elettriche sono in grado di offrire.

E. Daniele.

Digitized by Google

Calcolo differenziale.

W. H. Young. — *The fundamental theorems of the differential calculus.* Cambridge, University Press, 1910, 8°, pag. IX + 72 (Prezzo 2 s. 6 d.).

Questo libro contiene i capitoli più importanti del calcolo differenziale e delle sue applicazioni analitiche, esposti in forma rigorosamente logica, e con maggior generalità di quanto si usi fare nei trattati elementari; e tutto questo in sole 63 pagine, giacchè le ultime 9 contengono note e referenze bibliografiche. Ciò basta per far comprendere come l'autore abbia dovuto imporsi un' estrema concisione, e come il suo libro non debba riuscire molto facilmente accessibile ai giovani studiosi. Per compenso anche chi non è nuovo all'analisi vi trova molte cose belle ed interessanti ad apprendersi, giacchè non v'è, si può dire, teorema che l'autore non abbia posto sotto forma diversa dalla comune, sia semplificandone l'enunciato, sia estendendone la portata. Certo egli non ha potuto comprendere in questo volumetto tutti i risultati nuovi da lui ottenuti negli ultimi anni nel campo delle funzioni di variabili reali (vedi le sue memorie in *Quarterly Journal,* in *Proceedings of the London math. Society,* in *Messenger of mathematics,* etc.); ma molti di questi sono accennati nelle note in fine al volume.

L'autore parte dalle definizioni fondamentali di variabile, intervallo, funzione, limite (adottando il concetto della pluralità dei limiti introdotto da Peano e da Bettazzi), e stabilisce alcuni teoremi relativi alle funzioni semicontinue, continue, e punteggiate discontinue; passa poi alla definizione di derivata, alle regole di derivazione, al calcolo dei limiti delle espressioni indeterminate, alla formola di Taylor, ai massimi e minimi, al teorema del valor medio, a quello di Rolle. Nella teoria delle funzioni di due variabili egli fissa la sua attenzione, più che sulle derivate parziali, sui differenziali totali. Egli dice che una funzione $f(x,y)$ ammette il differenziale primo in un punto (a, b), se esistono in questo punto le due derivate parziali, e se per tutti i punti $(a+h, b+k)$ d'un certo intorno di (a, b) la differenza delle due espressioni:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

e:

$$df = h\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} + k\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}$$

Digitized by Google

ha la forma:

$$h\,e + k\,e',$$

dove e, e' tendono a zero comunque tendano a zero h e k; df si chiama il *differenziale primo* di f nel punto (a, b). Il differenziale di df, dove h e k si considerano come costanti, è il *differenziale secondo* di f; e così di seguito. L'uso costante del concetto di differenziale permette di dare forma più semplice ed estensione maggiore a certi teoremi; p. es. quello relativo all'invertibilità dell'ordine delle derivazioni viene così enunciato: Se $\frac{\partial f}{\partial a}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ ammettono il differenziale primo nel punto (x, y), allora in questo punto le due derivate miste sono eguali. Citiamo anche la regola per la derivazione delle funzioni composte, il teorema del valor medio, e la formola di Taylor. Con una certa ampiezza sono trattate le questioni relative alle funzioni implicite ed ai sistemi di funzioni implicite di una o più variabili; e merita qui di essere notato, a proposito del teorema fondamentale sull'esistenza d'una funzione implicita $y = \varphi(x)$ definita da una relazione $f(x, y) = o$ a cui soddisfa una coppia di valori (a, b), lo studio della dipendenza delle varie proprietà della funzione $\varphi(x)$ (esistenza, unicità, continuità, derivabilità) dalle singole ipotesi che possono farsi riguardo alla $f(x, y)$ (continuità di f, esistenza di $\frac{\partial f}{\partial y}$ in (a, b) od in un intorno di (a, b), continuità di $\frac{\partial f}{\partial y}$, esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}$ ∂. Gli ultimi capitoli sono dedicati alle serie di potenze, ed alle condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor secondo i concetti di Pringsheim.

Il metodo usato costantemente è quello dei limiti; nessun accenno agli infinitesimi. Il rigore logico è sempre accuratamente osservato; solo alcuni pochi punti avrebbero bisogno di qualche ritocco. Così la dimostrazione data per la regola di derivazione delle funzioni di funzione (§ 10) vale solo se v'è un intorno del punto t in cui $g(t + r)$ sia sempre diversa da $g(t)$; così il teorema per la derivazione d'un quoziente (ivi) presuppone che il denominatore non sia nullo nel punto considerato. Troviamo anche ingiustificata la mancanza dell'applicazione delle regole di derivazione alle funzioni elementari, e l'assenza d'un cenno anche

Digitized by Google

breve sulla continuità delle funzioni di due o più variabili e sulla distinzione tra la continuità rispetto a tutte le variabili insieme e quella rispetto a ciascuna di esse separatamente. Sono piccole mende, a cui sarà facile riparare senza accrescere sensibilmente la mole del libro.

G. Vivanti.

Tavole Numeriche.

Giuseppe Bernardi. — *Tavole contenenti i doppi, i quadrati, i tripli dei quadrati ed i cubi dei numeri interi da 1 a 1000, le quali danno anche senza calcolo esattamente od a meno di una unità le radici quadrate dei numeri interi compresi fra 1 e 1 milione e le radici cubiche degl' interi compresi fra 1 ed 1 bilione, e con un calcolo brevissimo esattamente i quadrati dei numeri interi compresi fra 1000 ed 1 bilione ed i cubi degl'interi compresi fra 1000 ed 1 milione, ed esattamente ed a meno di una unità le radici quadrate degl'interi compresi fra 1 milione e 10 bilioni ed anche degl' interi compresi fra 250 bilioni ed 1 trilione e le radici cubiche degl'interi compresi fra 1 bilione ed 1 quattrilione, ad uso degl'Istituti medi e superiori d' istruzione, specialmente tecnici, nautici, militari e professionali.* — Bologna Libreria Beltrami. Seconda edizione rifatta dall'autore. 8°, gr. p. XXVII + 25. (Prezzo L. 1.50).

Il lungo titolo di questa pubblicazione, che abbiamo fedelmente riferito, ci dispensa dal riassumerne il contenuto, che le nostre parole non differirebbero sostanzialmente da quelle usate dall'autore (1). D'altronde, molti lettori sanno che il Prof. Bernardi da tempo si occupa con grande amore dell'argomento su cui è testè ritornato e moltissimi ricorderanno di avere già letti nel *Giornale di matematiche* (T. XXXV) e nel *Periodico di matematica* (T. XVII) i teoremi che egli, sotto nuova forma, espone nell'esordio del presente scritto.

Che per primo egli abbia avvertita l'utilità di cui sono suscettibili le tavole di quadrati e di cubi non si può certamente asserire; è noto infatti, come il geologo W. K. Loftus abbia scoperto

(1) Essa venne presentata con lusinghiere parole alla R. Accademia delle Scienze di Torino nella seduta del 18 Dicembre 1910 da E. d'Ovidio ed al R. Istituto Lombardo nell'adunanza del 22 Giugno 1911 da L. Berzolari.

Digitized by Google

nel 1854 nei pressi di Senkreh sull'Eufrate due tavolette scritte in caratteri cuneiformi, che risalgono a circa 2400 anni a C. e che contengono i valori di $1^2, 2^2, \ldots, 60^2$ e di $1^3, 2^3, \ldots, 32^3$. E nei quarantaquattro secoli successivi non mancarono lavori congeneri, per quanto redatti con altri intendimenti e su più vasta scala: il lettore desideroso di conoscere i più recenti consulti l'articolo di R. Mehmke *Numerisches Rechnen* nell'*Encyklopädie der math. Wissenschaften.* Tali tavole, prima della scoperta dei logaritmi e prima dell'invenzione delle macchine calcolatrici possedevano una grande utilità: per convincersene basta osservare che la formola

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

permette di ridurre ad una sottrazione il calcolo del prodotto *ab* quando si disponga di una tavola di quadrati che giunga sino a $(a+b)^2$: gli è quanto ha visto chiaramente il celebre astronomo Antonio Magini che, appunto per tale scopo, compose e pubblicò nel 1592 una *Tavola tetragonica,* la quale presenta un'indiscutibile somiglianza con quella che oggi annunciamo. Oggi le tavole di quadrati e di cubi non sono più quell'ausiliare indispensabile che furono in passato; e sarebbe desiderabilissimo che il Prof. Bernardi, a complemento della sua meritoria fatica, facesse conoscere tutte le occasioni in cui possono servire ed a cui fa allusione nel titolo della pubblicazione testè segnalata. G. L.

B. Wanach. — *Tafel der Werte* $\frac{a \cdot b}{a+b}$ *für alle zweiteiligen Werten von* a *und* b *zur Berechnung der Gewichte von Summen, Differenzen, Mittelwerten* usw. Leipzig, B. G. Teubner, 1910. P. 25 (Prezzo Mk. 1.60).

Queste tavole (pubblicate sotto il patronato dell'Istituto geodetico Prussiano) danno il valore con una decimale della funzione $\frac{a \cdot b}{a+b}$ per tutti i valori di a, b compresi fra 1 e 100. L'A. le ha calcolate quattro volte e se ne serve dal 1890, onde la probabilità che non contengano errori confina con la certezza matematica. La stampa è chiara ed elegante, il formato scelto in modo che il trasporto riesca facile; onde non può ad esse mancare il favore dei calcolatori, pei quali ogni « libro di conti fatti » rappresenta un cospicuo risparmio di lavoro e di tempo.

G. L.

Digitized by Google

Geometria non-euclidea.

J. L. Coolidge. *The elements of non-euclidean geometry. Oxford, at the Clarendon press,* 1909. 8° p. 291 [Prezzo del vol. leg. sh. 15].

In questo trattato l'Autore edifica e sviluppa sistematicamente la geometria degli spazî a non più di tre dimensioni, seguendo tre indirizzi diversi (elementare, proiettivo, differenziale).

Sul primo si diffonde maggiormente. Egli non si limita a dire di voler conservare tutti i postulati euclidei eccetto quello relativo alle parallele, ma riprende *ab initio* e con somma cura la costruzione di tutto l'edifizio geometrico: assume come primitivi i concetti di *punto* e di *distanza* e con opportuni postulati (dei quali più innanzi discute la compatibilità e la indipendenza) pone i fondamenti per la geometria di una regione limitata di spazio; poi, coi teoremi sul quadrangolo birettangolo isoscele e sulla somma degli angoli di un triangolo, giunge alla distinzione delle *tre ipotesi;* ma non ne fissa alcuna e, restando nel campo di una geometria generale, procede alla ricerca delle formole fondamentali della Trigonometria e della Geometria Analitica, giovandosi del fatto che nello spazio infinitesimo vale l'ipotesi euclidea.

Costruita così la geometria di una regione limitata, l'A. passa all'estensione geometrica ed analitica dello spazio, distingue lo spazio *ellittico* dallo spazio *sferico,* introduce gli elementi improprî nello spazio euclideo e nello spazio iperbolico giungendo a quel concetto di *assoluto* che è il fondamento della metrica del Cayley. Infine chiude questa parte generale con lo studio del gruppo dei movimenti e con la ricerca degli invarianti metrici fondamentali dello spazio non euclideo.

Numerose ed interessanti sono le applicazioni alla Geometria Analitica: studio sistematico del circolo e della sfera, delle sezioni coniche e delle quadriche (con uso costante del principio di dualità); formole pel calcolo di aree e di volumi; un notevolissimo studio sulla geometria della retta. Nè meno interessanti sono le applicazioni alla Geometria Differenziale: studio delle *curve* e delle *superficie analitiche,* sullo schema dello studio analogo che trovasi in *Bianchi-Lukat (Vorlesungen über Differentialgeometrie)* nell'ipotesi euclidea; studio delle *congruenze di rette,* mediante forme differenziali quadratiche (già usate dal Fibbi ed analoghe a quelle adoperate dal Kummer nell'ipotesi euclidea).

Digitized by Google

Infine, dopo uno studio sugli spazî pluri-connessi, l' A. dedica due capitoli all' indirizzo proiettivo ed all' indirizzo metrico-diffenziale, fissando con cura anche in questi i concetti primitivi ed i postulati.

Questi rapidi cenni già mostrano che il trattato del Coolidge presenta una fisionomia tutta propria: esso infatti è il primo che si occupa, con equa misura, tanto dei fondamenti della geometria non euclidea, quanto del suo sviluppo; inoltre espone, in forma elementare, teorie interessanti che finora si trovavano soltanto sparse in memorie originali.

Ma è solo leggendo il trattato che si può constatare con quanta cura l'A. procede al graduale sviluppo della classica geometria non euclidea, giovandosi opportunamente di tutti i più importanti e moderni lavori geometrici, dei quali egli si dimostra conoscitore profondo. E mi è grato constatare, in particolare, la piena conoscenza che l'A. ha dei lavori italiani ed il gran conto in cui li ha tenuti.

Per finire osserverò che il Coolidge non ha esposta la geometrica non euclidea nel suo storico sviluppo, come hanno fatto fin qui gli altri Autori; anzi non fa parola delle sue origini, giudicando che oramai uno scrittore di geometria non euclidea può procedere a svilupparla senza sentire il bisogno di dare giustificazioni. Ciò è vero, ma a patto che il lettore a sua volta non senta il bisogno di chiederne allo scrittore; e ciò esige in lui una sufficiente preparazione. Or la preparazione migliore credo che consista nello studio delle origini della geometria non euclidea e del suo successivo sviluppo. Con un capitolo di introduzione relativo a queste origini l'A. avrebbe reso più autonomo il suo bel trattato.

GUSTAVO SANNIA.

Attualità.

H. POINCARÉ. — *Sechs Vorträge aus den reinen Mathematik und mathematischen Physik.* Mit sechs in den Text gedruckten Figuren. 8°. p. 60 (Prezzo Mk. 1.80, leg. Mk. 2.40).

Con gli interessi del capitale lasciato dal Dr. Wolfskehl (cfr. *Bollettino* XI, 1908-9, p. 92) la facoltà filosofica di Gottinga ha istituito un corso annuale di conferenze da tenersi dai più eminenti scienziati del mondo. La prima serie fu tenuta dal Poincaré e si trova condensata nel presente volume. Il quale contiene anzitutto tre conferenze destinate all' esposizione dei fondamenti

Digitized by Google

delle equazioni (integrali) del Fredholm ed alle loro applicazioni alla teoria del flusso del mare ed a quella delle onde hertziane. La quarta conferenza concerne la riduzione degli integrali abeliani e le funzioni fuchsiane e la quinta i celebri paradossi logici a cui recentemente ha guidato la teoria dei gruppi di punti. L' ultima conferenza, a differenza delle altre, fu tenuta in francese ed è riprodotta integralmente; scopo di essa è il dar notizia, sotto forma elementare e brillante, del come e perchè una nuova meccanica sia sorta accanto a quella classica e di dare una idea dei principi su cui riposa. L'illustre Autore conclude assicurando che la nuova meccanica è destinata ad assidersi accanto all' antica, non a prenderne il posto.

G. L.

Annuaire pour l'an 1912 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars (Prezzo fr. 1,50).

Oltre ai consueti articoli (che fanno ogni componente di questa collezione un vade-mecum indispensabile per tutti i cultori delle scienze d' osservazione) il presente volume contiene i due scritti originali seguenti: Bigourdan, *Sur la temperature moyenne dans les diverses parties de la France*; Hatt, *Notions sur la méthode des moindres carrés.*

G. L.

Notizie.

Ermanno Schubert è morto ad Amburgo il 20 Luglio 1911 a soli 63 anni (era nato a Potsdam il 22 Maggio 1848).

Tale luttuosa notizia sarà appresa con vivo cordoglio in Italia, ove l' illustre autore conta numerosi ammiratori e discepoli, chè la geometria numerativa — il ramo di matematica a cui egli si consacrò con maggiore impegno, raccogliendo non pochi allori — fu coltivata più assiduamente da noi che presso alcuna altra nazione. Sicchè a lui cui, come a Grassmann, non fu dato di salire sopra alcuna cattedra universitaria (1), la sorte, quasi a mo' d'indennizzo, concesse di creare da lungi un brillante manipolo di valenti discepoli. A quel ramo di scienza egli dedicò un' opera speciale (*Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879) ed un grande nu-

(1) La sua carriera didattica si svolse in massima parte nel Johanneum di Amburgo, ove egli entrò nel 1876; si era laureato a Halle nel 1870.

Digitized by Google

mero di memorie, che oggi ancora sono una guida indispensabile per tutti coloro che vogliono proseguire nella via da lui percorsa e che saranno consultate con profitto anche dopo che i fondamenti dottrinali della geometria numerativa avranno raggiunto quella granitica solidità che tutti desiderano ed augurano.

La geometria numerativa assorbì buona parte, ma non tutta l'attività scientifica dello Schubert; un'altra parte fu dedicata alla redazione di opere scolastiche, a cui arrise un considerevole e meritato successo (cf. *Bollettino* VIII, 109; IX, 90; XI, 23) ed un'altra ancora alla teoria matematica di alcuni giuochi (*Mathematische Mussenstunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur,* Leipzig, Göschen).

A lui devesi poi il concetto e l'attuazione dell'ottima collezione di manuali scolastici chiamata appunto *Sammlung Schubert* e di cui un grande numero di volumi venne analizzato in queste colonne.

Lavoratore infaticabile lo Schubert, uscito dal proprio gabinetto di studio, si trasformava in un allegro compagno: e sotto tale veste lo ricordano coloro che parteciparono al III Congresso internazionale dei matematici, ove egli presiedette il *commers* tenuto in quell'occasione dagli studenti dell'Università di Heidelberg, collaborando anche al *Liederbuch* pubblicato per tale circostanza.

Per ciò, mentre allo Schubert è assicurato un posto eminente nella storia della moderna geometria, la sua memoria rimarrà impressa per sempre nella mente e nel cuore di chi ebbe occasione di avvicinarlo.

***

TEMA PROPOSTO DELLA SOCIETÀ JABLONOWSKI PER L'ANNO 1913. — « Come si enuncia, nella teoria del potenziale newtoniano relativa all'ovaloide trasformato di un ellissoide per raggi vettori reciproci, la proposizione analoga al teorema di C. Neumann (Abh. d. K. Sächs. Ges. des Wiss. 1909)? La Società desidera che a questa questione si risponda, se anche non in generale, almeno per qualche caso speciale; così ad es. per il caso in cui il dato ellissoide sia di rotazione e che inoltre il polo di quell'inversione cada nel centro dell'ellissoide ».

Premio Mk. 1500. I lavori dei concorrenti devono essere inviati anonimi al Segretario della Società entro il 31 Ottobre 1913.

Digitized by Google

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

D' Adhémar. — Leçons sur les principes de l' analyse. Tome I. L. 11.
Arnoux. — Essai de géométrie analytique modulaire a 2 dimensions. L. 6.50.
Andoyer. — Nouvelles tables trigonométriques fondamentales (Logarithmes). L. 32.
Bricard. — Géometrie descriptive. L. 5.50.
Czuber. — Vorlesungen üb. Differential u. Integralrechnung I Bd. 3., sorgfaltig durchgeseh. Aufl. m. 125. Fig. L. 16.50.
Dingler. — Die Grundlagen d. augerdandt. Geometrie. L. 6.75.
Dumont. — Arithmétique générale. L. 11.
Gauss. — Recherches arithmétiques. Nouvelle édit. L. 16.
Guldberg-Walthénberg. — Theorie linearen. Differengengleichgn. L. 13.
Hauck. — Verlesungen üb. darstell. Geometrie unter bes. Berücksicht. d. Bedorfnisse der Technik. (In 2 Bdn.). I Bd. L. 16.50.
Hegwood et Frechet. — L' équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. L. 5.50.
Hilbert. — Théorie des corps de nombres algébriques. 1. partie. L. 10.
Kiepert. — Grundriss der Differential ü. Integral-Rechnüng. 2 Th. Neüe Aüfl. L. 35.
Kneser. — Die Integralgleichungen u. ihre Anwendg. a. d. mathem. Physik. L. 8.
Kowalewski. — Die komplexen Veränderlichen u. ihre Funktionen. L. 16.
Krause. — Theorie der ellipt. Funktionen. m. 25. Fig. L. 5.
Lalesco. — Introduct. à la theorie des équations integrales. L. 4.50.
von Mangoldt. — Einführung in die höhere. Mathematik. I Bd. L. 16.
Meyer W. Fr. — Über die Theorie benachbarter Geraden u. e. Verallgemeinerung der Krümmungsbegriff. L. 10.50.
Montessus et D' Ahdémar. — Calcul numérique. L. 5.50.
Poincaré. — Leçons sur les hypothèses cosmogoniques L. 13.
Prym u. Rost. — Theorie d. Prymschen Functionen.
Scheffers. — Lehrbuch d. Mathematik. II Aufl. L. 23.50.
Sommer. — Introduction à la théorie des nombres algebriques. L. 16.
Sthal. — Abriss e. Theorie d. algebraischen Funktionen e. Veranderlichen in neuer Fassung. L. 6.75.
Study. — Vorlesungen üb. ausgewahlte Gegenstände d. Geometrie. 1 Heft: Ebene alg. Kurven u. zu ihnen gehör. Abbildgn. L. 6.50.
Vailati. — Scritti 1863/1909. L. 15.
Weber. — Die partiellen Differential-Gleichungen d. mathemat. Physik. Nach Riemann' s Vorlesungen. in 5 Aufl. bearb. 2 Bd. m. 95 Abb. L. 20.

Pavia - Premiata Tipografia SUCCESSORI FRAT. FUSI.

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XIV — Fasc. II.

TORINO

ROSENBERG & SELLIER

Via Maria Vittoria, 18

1912

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo.

Osservazioni storiche sopra la scoperta degli irrazionali - Replica a T. L. Heath di H. Vogt pag. 33-35.

Opere complete ed Enciclopedie (L. Euler, G. Kowalewski) pag. 35-37.

Analisi (A. Guldberg e G. Wallenberg, G. Helm, G. Vivanti) pag. 37-44.

Algebra (M. Bôcher, G. Bauer) pag. 44-46.

Geometria analitica (L. Berzolari) pag. 46-47.

Didattica (P. Treutlein) pag. 47-48.

Curve piane (W. Peyerle, Haton de la Goupillière pag. 48-49.

Matematica Elementare (E. Borel, F. Enriques, H. Thieme) pag. 50-54.

Attualità (Yoshio Mikami, E. Kummer) pag. 55-57.

Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche (P. Duhem, C. Allasia, U. Cerreti, F. Amodeo, H. Bosmans, M. Cantor, A. Favaro, G. B. de Toni) pag. 57-61.

Notizie. Errata, A. A. Björnbo. Materiali per una nuova biografia di Gauss. Tema proposto dalla R. Accademia di Madrid per l'anno 1912. Per la storia della convergenza delle serie. Nuova interpretazione per un passo di pappo. Bryn Mawr College Monographs. International association for promoting the study of quaternions and allied systems of mathematics. Nuovi documenti relativi alla matematica medievale. Nuove notazioni algebriche.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XIV — Aprile, Maggio e Giugno — 1912

Osservazioni storiche sopra la scoperta degli irrazionali

Replica a T. L. Heath

di H. Vogt.

Nel Vol. XIII (1911) di questo *Bollettino* (p. 1-4) T. L. Heath ha sottoposto ad una critica sfavorevole i miei lavori sopra la storia della matematica greca pubblicati nei vol. VII, IX e X della *Bibliotheca mathematica* (III Serie). In quanto l'Heath esprime dei giudizi generici sopra la natura ed il valore dei miei scritti, per difendermi dalla sua critica attuale, io posso riferirmi ai suoi giudizi di più antica data. Infatti nel Vol. I (p. 360) della sua opera sopra *Euclide* (cfr. questo *Bollettino*, T. XI, 1908-09 p. 105) egli designa il mio lavoro sulla geometria degli Indiani in modo assai onorevole, assieme quelli di Cantor e Zeuthen, quale una « critica importante » (« three important notices and criticisms ») e (p. 360-364) accoglie favorevolmente i concetti più essenziali della mia pubblicazione. Nel Vol. III (p. 523-526) egli parla del mio lavoro sopra la geometria di Pitagora, accogliendo una parte delle mie idee e respingendone un'altra, e chiama questa memoria « notevole brano di critica degno di accurato studio » (« a valuable piece of criticism, deserving of careful study »). Il mio metodo non ha cambiato, come l'Heath stesso riconosce, dal momento che estende a tutti gli altri il giudizio che pronuncia sull'ultimo lavoro. È, dunque, il suo modo di giudicare che deve esser mutato. Le cose che prima gli sembrano importanti chiama ora « piccole questioni d'intollerabile lunghezza »; ciò che prima era « considerevole lavoro critico » è ora « indagini penosamente minute, anzi persino microscopiche »; e ciò che dianzi « meritava studio accurato » è attualmente abbattuto con pochi esempi.

Col mezzo degli esempi che l'Heath attinge al mio lavoro

Digitized by Google

sopra Platone egli vuole, non soltanto dimostrare che in alcuni punti io ho errato, ma anche che tutto il mio metodo di lavoro è antiscientifico; anzi tale metodo è, secondo lui, niente altro che un esempio di una riprovevole direzione assunta recentemente in Germania.

Con siffatta asserzione, di così ampia portata, l'Heath rende agevole la difesa: le obbiezioni generali cadono da sè poichè le argomentazioni mie sono quelle che usarono uomini, di cui non può venire revocata in dubbio l'autorità, come conoscitori della lingua e della matematica greca.

Per me come per l'Heath il primo significato di *πως* è « per qualche ragione ». Ma, quando chi racconta (Teeteto) non può scoprire alcuna determinata ragione nè obbiettiva nè subbiettiva, egli ricorre al significato secondario di « accidentale ». L'Heath intende l'ignoranza della ragione non da parte di chi parla ma nell'autore (Platone). Sgraziatamente egli è in conseguenza costretto di ricorrere ad una piccola ipotese ausigliare, cioè « ad attribuire a Platone troppo poca intelligenza »! La mia interpretazione, che l'Heath dice « impossibile » sarebbe adottata anche da Hankel e dai filologhi (H. Müller e M. Wohlrab) da me citati; persino il più recente traduttore del Teeteto, Otto Apelt, l'ha accetata.

τι ἔγραφε letteralmente può significare tanto « scrisse qualche cosa » quanto « disegnò qualche cosa ». Quando l'Heath in questo punto giudica « impossibile » la versione « disegnò delle figure » egli condanna, non soltanto me, ma anche, a tacere di altri, Fr. Hultsch, H. G. Zeuthen, O. Apelt.

La netta distinzione fra il « disegnare » ed il « dimostrare » fu da me tolta dall'Hultsch (v. la memoria *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes,* p. 376). Così non posso presentare come scoperta mia la descrizione dei lati incommensurabili di quadrati con l'espressione moderna di radice quadrata (« come egli la chiama ») sia dessa lodata o criticata.

ἀμφότερα e *συναμφότερα* indicano « due soggetti connessi nel tempo e nelle circostanze » (*Dizionario* del Passow), significano quindi una possibilità di combinazione ben più generale che « semplice addizione ». E l'Heath non indica nemmeno in qual modo egli renda intelligibile quel passo dell'*Ippia* assumendo l'interpretazione « addizione di quantità semplici irrazionali ».

Riguardo al titolo dell'opera di Democrito, che sinora rimase inintelligibile, io ho indicata la possibilità d'intenderlo mediante

Digitized by Google

un nuovo significato per le parole *ἀλόγων γραμμῶν* che si può giustificare mediante note teorie e cenni di Democrito, nonchè tenendo conto dello svolgimento posteriore della matematica greca ed a favore del quale oggi io posso citare anche l'indicazione *ὡς οἱ Δημοκρίτειοί φασιν* che si trova in uno scolio al teor. I del X Libro di Euclide. Io ho tenute chiaramente distinte le possibilità concettuali; l'Heath chiama invece tale separazione chiara e logica « una straordinaria confusione d'idee ».

La mia spiegazione della frase *ὧν δὴ νῦν εἴρηται* riposa sopra una traduzione letterale: *νῦν* significa « adesso » non « testè » cioè « da poco »; *εἴρηται* è un vero perfetto, non equivalente a *λέγονται*; dunque letteralmente « che furono dette adesso ». Perciò tali parole non si possono riferire « alla dottrina allora diffusa » e nemmeno agli « Elementi di Teeteto » dal momento che Teeteto non ha scritti degli « Elementi ».

So benissimo che i miei articoli, per profondità e vastità di cognizioni sopra l'antica geometria, non possono reggere al paragone di quelli di Hankel, Cantor, Hultsch e molti altri. Ma so altrettanto bene che questi grandi lavoratori, per quanto concerne la geometria preeuclidea e molte questioni della geometria più recente, erano al pari di me costretti a costruire sopra notizie sparse, senza legame, difficilmente intelligibili, contraditorie, e che essi, come mi sono sforzato di fare io, hanno tentato di trarre tutto quanto era possibile da questo terreno così incerto. Essi pure, malgrado tutti i lori sforzi, raramente arrivarono a verità indiscutibili, il piú delle volte a semplici probabilità. Essi pure, con successo variabile (per servirci della similitudine usata da G. Loria), hanno spinto in alto il « masso di Sisifo ».

Opere complete ed Enciclopedie.

L. Euleri, *Opera omnia sub auspicis Societatis Scientiarum naturalium Helvetica. Edendae curaverunt* F. Rudio, A. Krazer, P. Staeckel. *Series I. Opera mathematica.* Volumen I. *Vollständige Anleitung zur Algebra, mit den Zusätzen von* J. L. Lagrange, *herausgegeben von* H. Weber. *Mit einem Bilde von Euler nach dom Stiche von* Mechel, *einem Vorworte zur Eulerausgabe und der Lobrede von* Nicolaus Fuss. 4°. p. XCV-651. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1911. (Prezzo Mk. 28.50).

Ai nostri lettori è noto come il voto, formulato da Jacobi e ripetuto da tanti matematici posteriori, di vedere riunite in un

Digitized by Google

tutto quanto uscì dalla penna di Eulero, stesse per venire soddisfatto; essi conoscono anche il piano della progettata edizione e le persone chiamate a condurre a termine il colossale lavoro (v. *Bollettino*, T. XIII, 1911, p. 45). Ma è certo che produrrà in loro una piacevolissima sorpresa l'annunzio, che oggi diamo, che il I. dei quarantacinque progettati volumi è già pubblicato e (come non vi era da dubitare) per sostanza e per forma è ben degno del sommo analista di Basilea, della Società che dirige la grande impresa e della celebre Casa che assunse l'edizione.

Quale sia il contenuto del volume in discorso risulta chiaramente dal titolo che abbiamo completamente riferito. Tale volume si apre con una particolareggiata esposizione, fatta da F. Rudio dei lavori che condussero al risultato che sembrava « follia sperar », delle persone e dei sodalizi che vi contribuirono (1) e del piano dell'edizione; fra quanto è ivi annunciato e promesso procurerà indubbiamente in tutti una grande soddisfazione la assicurazione che la stampa di parecchi volumi procederà di conserva (2), ond'è ragionevole la speranza che l'impresa possa essere condotta a buon termine sotto la direzione e con la collaborazione delle persone oggi a ciò designate.

Segue il ben noto *Elogio di Eulero* scritto da N. Fuss, il degno e affezionato discepolo del grande matematico, nella traduzione tedesca fattane dal Fuss medesimo, senza l'*Elenco delle pubblicazioni* euleriane redatte da questo, chè, benchè compilato con diligenza, non regge al paragone di quello che oggi possediamo grazie all'Enestrom.

E poi il trattato di *Algebra* dettato dell'immortale analista al tramonto della sua operosa esistenza, con le splendide Note di cui lo corredò Lagrange e con alcune correzioni ed osservazioni di H. Weber. Se tale trattato nella parte dottrinale o (se meglio piace) filosofica, non soddisfa le tendenze rigoristiche moderne, per quanto concerne la forma, l'ordinamento della materia, e i

(1) Perchè mai non venne ricordato, assieme a quanto si fece nel corso del I e del IV Congresso internazionale dei Matematici, anche una deliberazione presa nel III? (cfr. *Verhandlungen des III intern. Math. Kongresses*, p. 52).

(2) Si annunciano già pronti per la stampa le *Institut. Calculi diff.* (Kowalewski) ed il volume consacrato alle *Funzioni ellittiche* (Krazer); i due volumi di *Diottrica* (Cherberliez) videro la luce mentre il presente articolo attendeva il proprio turno di pubblicazione.

Digitized by Google

riguardi alle esigenze didattiche è capace d'insegnare ancora molto a molti; per ciò, se ci si libererà dal preconcetto che un libro scritto un secolo e mezzo fà non possa essere che oggetto di semplice curiosità per gli eruditi, questa ristampa dell'*Algebra* di Eulero potrà ancora esercitare una benefica influenza; inoltre lo storico della scienza leggendo le magnifiche pagine ivi consacrate all'analisi indeterminata, ravviserà in Eulero il grande virtuoso del calcolo algebrico, il continuatore e discepolo di Diofanto, il principe degli aritmetici greci. G. L.

Forschung un Studium. Eine Sammlung mathematischer Monographien für Studierende herausgegeben von G. Kowalewski. Heft I. *Das Integral und seine geometrischen Anwendungen von* G. Kowalewski. Mit Figuren. 8°. p. 86. (Prezzo Mk. 3).

Ai grandi trattati (tipo Eulero, Riccati, Lacroix) delle epoche passate l'èra presente ha sostituito collezioni di monografie sopra soggetti speciali; a quelle che già da tempo furono iniziate in Francia, in Inghilterra ed in Germania, una nuova se ne aggiunge oggi per merito dell'infaticabile Prof. Kowalewski, il quale sembra condividere l'opinione che, anche nel campo morale, per gli stomachi deboli sia da preferirsi la nutrizione a piccole dose ai pasti eccessivamente copiosi. Per fare un nuovo esperimento di quella che qualche maligno chiamò « scienza in pillole », egli scelse un argomento della massima importanza e su cui anche di recente furono fatti studi importanti, che urge vengano nel dominio del pubblico. La trattazione si divide in tre parti: L'integrale semplice, L'integrale doppio, Lunghezza dell'arco e area di superficie. L'esposizione è rigorosa ma chiara, onde, se dall'alba è dato di trarre l'oroscopo per l'avvenire, si può ritenere che la nuova collezione di monografie riuscirà degna delle sue sorelle maggiori. G. L.

Analisi.

Theorie der linearen Differenzengleichungen, unter Mitwirkung von A. Guldberg, von G. Wallenberg. Teubner, Leipzig und Berlin, 1911. pag. XI-288. [Prezzo Mk 10].

Dell'opera di cui diamo qui brevemente cenno, si può dire, per quanto trita sia l'espressione, che si propone di colmare una lacuna nella letteratura matematica. Il calcolo delle differenze

Digitized by Google

finite ha formato oggetto di non pochi libri: per non risalire oltre al secolo XIX, si possono citare quelli del LACROIX, dello HERSCHELL, del BOOLE, del PASCAL, del MARKOFF, dello SCHLMILCH del SELIWANOFF, ecc. Ma in questi trattati, per lo più, si conserva al calcolo delle differenze il suo carattere di istrumento atto a giovare nelle questioni di interpolazione, di sommazione di valutazione di errori e simili, e con uguale intendimento sono state condotte molte delle ricerche, contenute, in Memoria separate, sulle equazioni alle differenze finite, lineari o no. Però altri lavori, pure numerosi, su codeste equazioni, hanno avuto di mira scopi diversi: prescindendo dalle applicazioni a quel campo semipratico cui pareva, per tradizione, quasi esclusivamente destinato il calcolo delle differenze finite, esse erano rivolte, d'una parte, a mostrare come al pari delle espressioni differenziali lineari, anche le espressioni lineari alle differenze potessero dare il materiale di un'algebra che, tanto dal punto di vista formale quanto da quello gruppale, offre una rimarchevole analogia coll'algebra delle funzioni razionali; dall'altra, come le soluzioni delle equazioni alle differenze, interpretate in un campo continuo di valori reali o complesse, potessero dare nuove e ricche classi di trascendenti. Ne dà esempio semplice e classico la funzione *Gamma* che, nonostante la spontaneità con cui si presenta nell'Analisi, non può venire fornita da alcuna equazione algebrico-differenziale. Mentre al capitolo dell'Analisi che si può dire gemello di questo, voglio dire alla teorica delle equazioni differenziali lineari, sono dedicate opere apposite, e basti citare il voluminoso *Handbuch* dello SCHLESINGER, mancava, per le equazioni lineari alle differenze, un lavoro d'insieme, organico e completo, che raccogliesse i risultati dei lavori sparsi, e, come dicemmo, già assai numerosi sull'Algebra delle forme lineari alle differenze e sull'efficacia genetica delle equazioni lineari alle differenze nel campo costruttivo delle trascendenti. Se l'opera del WALLENBERG non risponde appieno a questo desiderato, almeno nella seconda parte — e la novità e la complessità della materia spiegano le difficoltà che vi può avere incontrato un primo tentativo — pure si deve riconoscere che essa ne rappresenta una assai buona approssimazione.

L'opera si apre con un primo Capitolo, in cui sono svolte alcune nozioni introduttorie: premessa la definizione di equazione alle differenze, se ne danno alcuni esempi semplici e si precisa il concetto di condizioni iniziali; si danno le principali formule

Digitized by Google

classiche di sommazione, e, premesse le necessarie nozioni sulla funzione *Gamma*, si costruisce una soluzione particolare per l'equazione lineare alle differenze a coefficienti razionali. Notiamo che è di equazioni a coefficienti razionali che si tratta quasi in tutto il volume (fa eccezione il Cap. IX e l'ultima parte del X); l'A. ha creduto opportuno d'imporsi questa restrinzione per una maggiore semplicità dello sviluppo e precisione nei risultati. Al primo Capitolo, che vale come introduzione, ne seguono altri cinque, costituenti quella parte dell'opera che si potrebbe chiamare l'Algebra delle forme lineari alle differenze, parallela a quella già nota per le forme lineari differenziali e dovuta al Libri, al Frobenius, al Thomè, ecc., per la parte che riguarda la composizione decomposizione e riducibilità delle forme e all'Appell, al Picard, al Vessiot, ecc. per la parte gruppale.

La parte formale dell'Algebra delle forme alle differenze è trattata nei Capitoli II e III; vi si contengono i risultati principali conseguiti in questo campo da varî scrittori, e in particolare dall'A. stesso: il giuoco delle condizioni d'indipendenza di piú funzioni mediante le considerazioni del determinante di Casorati che ha in questo calcolo lo stesso ufficio che il Wronskiano ha nella teoria delle equazioni lineari differenziali, lo studio dei sistemi fondamentali di soluzioni, la costruzione della equazione che ammette un dato sistema fondamentale, il prodotto, il quoziente, i comuni divisori di più forme, la teoria dei moltiplicatori e dell'equazione aggiunta, vi sono esaurientemente trattati. I concetti gruppali e quello di riducibilità sono estesi alle forme alle differenze nei Cap. IV, V e VI la cui redazione, pei due primi e per la massima parte dell'ultimo è dovuta al Guldberg, di cui sono noti i lavori in questo campo. L'argomento si inizia con un teorema analogo a quello fondamentale di Appell per le equazioni differenziali lineari e che si può riguardare come il corrispondente di quello delle funzioni simmetriche nella teoria delle equazioni. Da questo segue l'espressione della condizione perchè due equazioni lineari alle differenze abbiano una soluzione comune e la determinazione dell'equazione, che ammette le soluzioni di altre date. Segue il concetto di equazioni delle stesse specie, quello di equazioni associate, strettamente analoghe a quelle indicate collo stesso nome nella teoria delle equazioni differenziali lineari; indi il concetto di riducibilità in un dato campo — prevalentemente quello delle funzioni razionali — e la decomposi-

Digitized by Google

zione di una forma alle differenze in fattori irriducibili, in analogia colla corrispondente teoria data dal LOEWY per le forme differenziali, lineari. Nel Cap. 6 è introdotta, per una data equazione lineare alle differenze, una equazione che sostiene presso della data una parte analoga a quella sostenuta dalla risolvente di GALOIS presso ad un'equazione algebrica: indi, posto il concetto di *gruppo di razionalità* di un'equazione alle differenze si giunge ad un teorema analogo a quello fondamentale di PICARD e VESSIOT per le equazioni differenziali lineari. Le conseguenze che se ne traggono circa alle riducibilità dell'equazione in relazione colle riducibilità del proprio gruppo, alla riduzione del gruppo mediante aggiunzione di nuovi elementi, ecc., offrono colle analoghe considerazioni per le equazioni differenziali una costante analogia, resa manifesta dal confronto delle relative pagine del nostro libro colla prima parte del secondo volume dello *Handbuch* già citato dello SCHLESINGER. Dicendo *quadratura* l'integrazione d'una equazione del primo ordine:

$$\frac{y_{x+1}}{y_x} = a_x ,$$

la possibilità dell'integrazione per quadrature nel dato campo di razionalità coincide coll'essere il gruppo dell'equazione *integrabile* nel senso del LIE; pertanto l'equazione generale lineare alle differenze di ordine $n > 1$ non è integrabile per quadrature. Chiudono questa sezione alcune applicazioni della teoria del gruppo di razionalità: citiamo le condizioni perchè due forme lineari alle differenze, del primo o del secondo ordine, siano permutabili.

Nella seconda sezione dell'opera del W., a dire vero meno completa ed organica della prima, la teoria delle equazioni lineari alle differenze è trattata sotto ad un tutt'altro punto di vista: delle soluzioni di tali equazioni è considerato in modo speciale il carattere analitico e la loro rappresentazione mediante le espressioni di calcolo più confacenti a codesto carattere; certo è però che un simile studio si trova ancora ai suoi albori, e la questione non può essere sviscerata se non per tipi particolari di equazioni. Il Cap. VII, primo di questo sezione studia il caso semplice ed ovvio delle equazioni a coefficienti costanti, omogenee o no. L'A. ne discorre ampiamente, astenendosi di proposito dal

Digitized by Google

fare uso dei metodi simbolici; non è però a negarsi che questi metodi, ossia i principi generali delle teorie delle operazioni, non giovino a dare all'argomento un grado maggiore di perspicuità e ad avvicinare le equazioni qui studiate ad un' intero gruppo di equazioni funzionali di cui esse non sono se non un caso particolare. Il Cap. VIII è dedicato alle equazioni alle differenze a coefficienti lineari, e alla loro integrazione mediante la trasformazione di Laplace. A questo Capitolo si sarebbero potuto riattacare le ricerche su equazioni funzionali di tipo più generale di quelle alle differenze, per la soluzione delle quali valgono metodi simili, come, ad esempio l'equazione.

$$\sum_{h=1}^{m} (h_n x + k_n) f(x + a_n) = F(x)$$

dove F è funzione data, ed f. è funzione incognita.

Al comportamento degl'integrali y_x di un'equazione lineare alle differenze, o piuttosto del rapporto $y_{x+1} : y_x$ per $x = \infty$ è dedicato il Cap. 9. Un celebre teorema dovuto al POINCARÉ, signoreggia l'argomento: secondo questo teorema, il rapporto sudetto tende, per $x = \infty$, ad una delle radici di un'equazione algebrica (equazione caratteristica) strettamente legata alla data equazione alle differenze. L'A., pur seguendo le traccie del POINCARÉ, tenta di renderne la dimostrazione rigorosa e scevra da appunti che vi erano stati mossi: non si può dire che vi sia pienamente riuscito, e conviene aggiungere che Egli non accenna alle ingegnose considerazioni che su questo teorema ha svolte il VAN VLECK. È accennato al caso più complesso in cui l'equazione caratteristica può ammettere le radici di egual modulo; sono alquanto fugacemente ricordati i risultati assai notevoli recentemente ottenuti in proposito dal PERRON; è infine indicato il concetto di *integrale distinto* con cui ho designato quello per il quale $y_{x+1} : y_x$ tende al minimo limite, e all'importanza di questo integrale per lo sviluppo in frazione continua nel caso dell'equazione di second'ordine: si potrebbe aggiungere che è questo concetto che porta alle più ovvie generalizzazioni della frazione continua nel caso dell'equazione di ordine superiore. Il decimo ed ultimo Capitolo tratta dell'integrazione per serie delle equazioni alle differenze. Le serie di potenze, istrumento così valido per l'espressione degli integrali delle equazioni differenziali, perdono qui la loro importanza, come aveva già osservato EULER; si prestano invece egregiamente le

Digitized by Google

serie di fattoriali, la cui teoria, già studiata da altri, è stata di recente rigorosamente fondata dal LANDAU. L'A. considera dapprima, al punto di vista dell'integrazione per serie, le equazioni del primo ordine, omogenee o no, dandone esempi particolari interessanti anche al punto di vista storico, e mostrando come si presentino spontanei in questa teoria gli sviluppi assintotici. Egli passa poi alla considerazione delle equazioni del secondo ordine, di tipo ipergeometrico, tratta dell'integrazione, mediante serie di fattoriali a convergenza effettiva od assintotica, delle equazioni di ordine qualunque a coefficienti razionali; per ultimo, accenna alla integrazione, mediante analoghe serie convergenti, di quelle equazioni i cui coefficienti stessi sono serie di fattoriali. Non pochi degli argomenti trattati in questo Capitolo potrebbero formare oggetto di nuove e più estese ricerche, poichè per parecchi si può dire che la teoria ne è ancora nel nascere.

Abbiamo reso con ciò succintamente conto di un libro interessante, di cui, nonostante alcune mende, è da raccomandare la lettura ai nostri giovani matematici che vi troveranno raccolto e corredato di numerose indicazioni bibliografiche un ricco materiale. Riunendo così i risultati di ricerche sparse in varie raccolte periodiche o rendiconti di accademi, l'A. ha reso un vero servizio alla scienza, e ci sembra che se, sopratutto nella seconda parte, non è riuscito a dare all'esposizione della materia, nuova e complessa, una forma organica, pure ha contribuito, seconda la sua espressione, " a rivendicare al reame della matematica una vecchia provincia, un campo di ricerche per lungo tempo lasciato incolto, ma che può e deve dare ancora abbondante messe ".

S. PINCHERLE.

GEORG HELM, *Die Grundlangen der höheren Mathematik.* — Leipzig Akademische Verlagsgesellschaft, 1910. 8°. p. XV+419.

La fusione del corso di " Algebra complementare e Geometria analitica " con quello di " Calcolo infinitesimale ", avvenuta in Italia presso parecchie Scuole d'applicazione per gli Ingegneri e che va generalizzandosi sempre più, è un fenomeno non esclusivo all'Italia. L'opera che annunciamo, testo delle lezioni di Analisi matematica ad uso degli studenti del Politecnico di Dresda, sta a dimostrarlo. Trattandosi di un lavoro scolastico non è il caso di arrestarci ad esaminarlo in tutti i suoi meati; vale però la pena di riferirne qui un indice particolareggiato,

Digitized by Google

dopo di avere segnalata l'introduzione delle nozioni fondamentali di Calcolo geometrico e notato come le applicazioni delle teorie matematiche esposte furono tolte, non solo dalla geometria e dalla meccanica, ma anche dalla fisica e dalla chimica, caratteristica importante che andava rilevata.

I. Parte. *Il concetto di funzione* (Costanti e variabili; il metodo delle coordinate; classificazione delle funzioni).

II. *Il concetto di limite e la derivazione* (Concetto di limite; concetto di derivata; differenziazione delle funzioni semplici; differenziazione delle funzioni trigonometriche; differenziazioni del logaritmo e della funzione esponenziale; differenziazione delle funzioni implicite).

III. *Applicazione del calcolo differenziale* (La derivata come criterio per distinguere il crescere ed il decrescere di una funzione; il teorema della media; massimi e minimi; forme indeterminate).

IV. *L'integrazione* (L'integrale indefinito; metodi generali d'integrazione; l'integrale definito).

V. *Segni di segmenti e superficie; vettori e momenti* (Vettori; rettificazione delle curve piane; composizione dei vettori; momenti e segni delle superficie; il planimetro polare; quadrature approssimate).

VI. *Coordinate polari* (Trasformazione delle coordinate; formole di differenziazione ed integrazione in coordinate polari).

VII. *Il sistema di coordinate cartesiane* (Coordinate ortogonali e coordinate oblique; trasformazione delle coordinate; grado di equazioni ed ordine di curve).

VIII. *Serie infinite* (Convergenza delle serie; il teorema di Taylor; sviluppi in serie per e^x, *sen* x, *cos* x; teorema del binomio; serie logaritmica; metodo dei coefficienti indeterminati).

IX. *Relazione fra tre variabili* (Funzioni di più variabili; coordinate rettangole nello spazio; aree e superficie in coordinate ortogonali).

X. *Relazioni metriche nello spazio* (Composizione dei vettori; tangenti alle curve gobbe; rettificazione di queste; complanazione delle superficie cilindriche o di rotazione).

XI. *Derivate parziali* (Differenziazione parziale e totale; calcoli di errori per funzioni a più variabili; seconde derivate parziali).

XII. *Integrali multipli* (L'integrale doppio; l'integrale triplo.

Digitized by Google

XIII. *Trattazione analitica della retta.*

XIV. *Trattazione analitica del cerchio.*

XV. *Trattazione analitica delle coniche.*

XVI. *Equazioni differenziali* (del I e del II ordine).

XVII. *Metodi d'integrazione indefinita* (Integrazione di funzioni razionali, irrazionali e trascendenti).

XVIII. *Integrali definiti* (Integrali impropri; differenziazione d'integrali definiti; cambiamento di variabili negli integrali doppi; integrazione per serie).

XIX. *Interpolazione* (mediante funzioni intere o periodiche).

XX. *Geometria analitica dello spazio* (Piani, rette e quadriche).

XXI. *Le serie di Taylor per funzioni a più variabili e le sue applicazioni* (Massimi e minimi per funzioni a più variabili; piani tangenti e normali delle superficie; curve sghembe; curvatura delle superficie). G. L.

G. Vivanti, *Les fonctions polyédriques et modulaires. Ouvrage traduit par* Armand Cahen. 8°. p. VI + 319. Paris, Gauthier-Villars 1910 (Prezzo fr. 12).

L'originale di quest'opera venne esaurientemente analizzato in queste colonne (v. *Bollettino*, T. X, 1907, p. 20-22); siccome la traduzione francese segue fedelmente il testo italiano, così non è il caso di farne più di un cenno; ci sia lecito soltato di rilevare come il giudizio degli stranieri sopra il trattato dell'egregio nostro collaboratore risulti pienamente conforme a quello pronunciato al di quà delle Alpi. G. L.

Algebra.

M. Bôcher, *Einnführung in die höhere Algebra. Deutsch von* Hans Beck. *Mit einem Geleitwort von* E. Study. 8°. p. XII-348. Leipzig un Berlin, B. G. Teubner 1910 (Prezzo del vol. leg. Mk. 7).

Questo libro procurerà indubbiamente una delusione a coloro che ritengono sussistere l'equazione " Algebra superiore „ " Teoria delle equazioni „, chè in esso non si trova la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, nè vi si leggono i metodi di risoluzione delle equazioni algebriche, nè la teoria di Galois,

Digitized by Google

ecc. Ma poichè quell'equazione è così lungi dall'esser stata dimostrata che da molti viene revocata in dubbio, così nessuno potrà fare un carico all'A. di avere informato il corso di lezioni da lui tenute all'Università Harvard (Cambridge Mass.) all'aspirazione di rendere i propri discepoli famigliari con i concetti ai quali s'informa la teoria degli invarianti, considerata sia come disciplima a sè, sia come ausiliare preziosa per lo studio delle proprietà degli spazi lineari. Tanto piú che così egli, invece di scrivere un nuovo libro sopra la falsariga di altri a ragione reputati eccellenti, ha arricchita la letteratura matematica di un opera che al di là dell'Oceano conseguì subito una larghissima rinomanza ed al quale la traduzione che annunciamo non tarderà ad accrescere a dismisura la sfera di benefica influenza.

Per porgere ai nostri lettori un'idea delle teorie di cui è materiata l'opera del Prof. Bôcher riportiamo qui i titoli dei ventidue Capitoli che la compongono:

I. Polinomi. II. Determinanti. III. Dipendenza lineare. IV. Equazioni lineari. V. Rango di una matrice. VI. Trasformazioni lineari. Combinazione delle matrici. VII. Invarianti. Concetti fondamentali ed esempi. VIII. Forme bilineari. XI. Forme quadratiche; introduzione geometrica. X. Forme quadratiche. XI. Forme quadratiche reali. XII. Sistema di una forma quadratica e di parecchie forme lineari. XIII. Coppie di forme quadratiche. XIV. Proprietà generali dei polinomi. XV. Divisori comuni di polinomi ad una variabile e di forme binarie. XVI. Divisori di polinomi a due più o variabili. XVII. Invarianti razionali interi. Teoremi generali. XVIII. Polinomi simmetrici. XIX. Polinomi simmetrici rispetto a coppie di variabili. XX. Divisori elementari. XXI. Equivalenza e classificazione di coppie di forme bilineari e di collineazioni. XXII. Equivalenza e classificazione delle coppie di forme quadratiche.

L'A. (che è un americano educato alla scuola di F. Klein e laureato a Gottinga) non è un analista puro intransigente, sicchè nella sua esposizione i calcoli (del resto semplici ed eleganti) si alternano alle considerazioni geometriche. Inoltre egli, uniformandosi alle lodevoli consuetudini anglosassoni, ha intercalato nel testo numerosi ed interessanti esercizi, adoperandosi in tal modo a far sì che i suoi lettori od ascoltatori abbandonassero la troppa comoda parte di spettatori indifferenti. Se libri scritti con tali intendimenti fossero largamente diffusi fra noi, si otterrebbe

Digitized by Google

forse che anche nelle scuole superiori italiane non alignasse la mala pianta, del « dolce far niente », troppo amorosamente coltivata, malgrado l'opposizione incessante di professori coscienziosi. G. L.

G. Bauer, *Vorlesungen über Algebra.* Herausgegeben vom mathematischen Verein München. Mit dem Bildnis Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1910. 8°. gr. p. VI + 366. [Prezzo del vol. Mk. 11, leg. Mk 12].

Di questo volume venne reso conto in modo particolareggiato quando esso apparve per la prima volta (v. *Bollettino*, T. VII, 1904, p. 83-85). Ora ci è lecito limitarci ad un semplice annunzio perchè la nuova edizione non differisce dalla prima che per qualche ritocco che non ne altera il piano e la fisonomia generale Il fatto che dell'opera del Bauer fu resa necessaria una nuova edizione a soli sei anni di distanza e dopo la morte dell'autore (3 aprile 1906), porge indubbia testimonianza delle qualità indiscutibili che possiede e che la pongono in grado di sopportare il paragone con le opere congneri del Serret, del Weber e del Bôcher. G. L.

Geometria analitica.

L. Berzolari, *Geometria Analitica.* — Parte I. *Il Metodo delle coordinate,* pag. XVI-410 (Prezzo L. 3), Milano, Hoepli 1911.

Questo Manuale Hoepli è con qualche modificazione la prima parte delle belle lezioni di Geomeria Analitica esposte dal Prof. L. Berzolari nella R. Università di Pavia. La lettura del presente trattato riuscirà assai facile e chiara per gli studenti; inoltre il metodo è uniforme e dotato di rigore e precisione di linguaggio, onde p. es. non avverrà di leggere le antiquate ed inesatte locuzioni relative ad equazioni di elementi improprii, come si può vedere in un trattato Italiano di Geometria Analitica molto in uso.

L'A. ha opportunamente lasciato per il secondo volume la teoria generale delle coniche e delle quadriche; nel presente intende specialmente a mostrare come il concetto delle coordinate cartesiane si attui nella rappresentazione dei luoghi geometrici e

Digitized by Google

nella risoluzione di questioni geometriche metriche, come determinazione di angoli, distanze, aree, volumi. Sono stati scelti in modo conveniente dall'A. gli esempi di curve e di superficie e per quest'ultime giova fermare l'attenzione sull'elicoide rigato ad area minima. Trattando delle curve è ben introdottto, limitatamente però alla parte essenziale, l'importante concetto di sistema lineare per curve piane algebriche.

Le coordinate generali proiettive nelle forme fondamentali delle prime tre specie sono studiate negli ultimi capitoli del volume, perchè, come osserva l'A., in un primo studio della Geometria Analitica, specialmente per gli ingegneri, hanno maggior importanza le coordinate cartesiane. In quest'ultima parte delle coordinate proiettive meritano una speciale attenzione del lettore la formola di Laguerre, i punti ciclici del piano ed il circolo assoluto dello spazio, la notazione abbreviata colla sua applicazione alla legge di dualità.

G. Z. Giambelli

Didattica.

P. Treutlein, *Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen. Mit einem Einführungswort von* F. Klein *und mit* 38 *Tafeln und* 87 *Abbildungen im Text.* 8°. p. X 216 (Prezzo Mk. 5; leg. Mk. 5,60).

Molti dei nostri lettori ricorderanno le lunghe ed accanite dispute che sorsero qualche anno fà in Italia quando, nei Programmi delle nostre Scuole Medie, fu introdotta la « geometria intuitiva »; parve a molti che ciò costituisse un attentato contro l'autocrazia euclidea, un tentativo di rendere meno puro l'insegnamento della scienza dell'estensione, senza riflettere che l'esistenza degli *Elementi* di Euclide nulla prova contro l'ipotesi che esso servisse di libro da testo per giovinetti già resi famigliari con le più semplici figure geometriche. Comunque, i sostenitori della geometria intuitiva ebbero il sopravvento e nelle scuole nostre ha preso salda radice un insegnamento propedeutico della geometria. Sembra che altrettanto non sia ancora stato ottenuto in Germania e per conseguire tale scopo il Prof. Treutlein ha scritto il libro che annunciamo, ove la questione dell'introduzione della geometria intuitiva viene trattato con grande profondità e lumeggiata da tutti i punti di vista.

Digitized by Google

Antico e reputato cultore della storia delle matematiche, il Treutlein comincia dall'enumerare coloro che furono fautori di quel metodo d'insegnamento, ponendo a capo di essi uno dei più grandi pedagogisti del mondo, il Pestalozzi; buon numero delle notizie ivi raccolte con grande coscienziosità riusciranno nuove ed interessanti a molti e proveranno che la questione trattata dal Prof. Treutlein (sotto la valida tutela di F. Klein) non si possa dire nuova, anzi dovrebbe ascriversi fra quelle mature.

Il Treutlein fà poi conscere quali, secondo lui, sono le condizioni a cui deve soddisfare l'insegnamento della geometria intuitiva per riuscire utile e sopra opportuni esempi chiarisce i propri criteri didattici. E poichè, secondo lui, l'intero corso geometrico dovrebbe constare di due parti di eguale lunghezza, uno intuitivo e l'altro logico, dopo di avere tracciato minutamente il piano del primo, schizza con mano maestra quello del secondo. Nella impossibilità in cui ci troviamo di entrare in particolari minuti, notiamo due sole cose: una che il Treutlein propugna l'introduzione nell'insegnamento medio del concetto di corrispondenza geometrica, ben inteso sotto la sua forma più semplice; l'altro che egli è favorevole alla fusione, purchè adoperata con misura e tatto, il che non stupirà chi ricorda che è egli il traduttore in tedesco dei noti i *Elementi di geometria* di G. Lazzeri e A. Bassani.

Il libro del Prof. Treutlein — che corona una lunga serie di anni di insegnamento e che prelude ad una collezione di modelli ausiliari per l'insegnamento geometrico elementare — contiene una folla di osservazioni acute e di informazioni interessanti: esso va raccomandato tanto ai giovani che si accingono a salire sopra una cattedra di matematica, quanto a coloro che già vi si trovano col mandato di far per primi conoscere la natura e le qualità delle figure geometriche.

G. L.

Curve piane.

W. Peyerle, *Ableitung algebraischer Kurven aus dem Durchschnitte von Flächen.* Graz, im Selbstverlag des Verfassers, 1908, 1910.

Qualunque equazione contenente una sola incognita x può in infiniti modi considerarsi come risultante dell'eliminazione di un'altra incognita y fra due equazioni che contengano le due x. y; da tale osservazione traggono origine i molteplici precedimenti

Digitized by Google

che vennero immaginati per ridurre la ricerca delle radici d'una equazione alla determinazione de' punti comuni a due linee di un piano.

Similmente, qualunque equazione con due incognita x, y si può in infiniti modi considerare come risultante dalla eliminazione di z fra due equazioni in x, y, z; geometricamente ciò significa che qualunque curva piana si può intendere come projezione ortogonale dell'intersezione di due superficie. Gli è tale considerazione che l'A. ha applicata metodicamente allo studio ed alla costruzione di un grande numero di curve piane del terzo e del quarto ordine. Ad esse egli si limitò (anzi alle più semplici fra tali curve) per ottenere costruzioni eleganti e facilmente eseguibili; ma è chiaro che egli non ha esaurito il campo che si dilettò a coltivare: a provarlo basti notare che non ha fatto cenno della concoide di Dürer, che pure può ottenerci siccome projezione dell' intersezione di due paraboloidi, uno ellittico ed uno iperbolico (v. G. Loria, *Spez. ebene Kurven*, I. Bd., II. Aufl. Leipzig 1910, p. 228).

La parte principalmente dell'opera in discorso è costituita dalle belle figure, chè il testo si riduce a poche notizie bibliografiche o dottrinale sopra lo studio delle curve piane speciali.

Il concetto applicato dall'A., non è certamente nuovo, ma merita di essere segnalato come un nuovo aspetto sotto cui si manifesta l'utilità di considerazioni stereometriche nell'investigazione delle proprietá delle figure piane ed anche perchè palesa il vantaggio che la geometria delle linee piane puó ricavare dall'applicazione dei metodi propri della geometria descrittiva.

G. L.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Etude géometrique et dynamique des roulettes planes et sphériques*. 4°. p. 107. Paris, Gauthier-Villars 1910.

Segnaliamo e raccomandiamo vivamente ai nostri lettori questa importante monografia, ove, con perfetta unità di metodo e mirabile eleganza, si trova esposto tutto ciò che sino ad oggi si conosce intorno alle curve generate dal ruzzolamento di una curva sopra di un'altra, nel piano e sulla sfera, con aggiunte degne di interessare tanto i cultori della geometria quanto quelli della meccanica.

G. L.

Digitized by Google

Matematica Elementare.

E. Borel, *Die Elemente der Mathematik. Vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe besorgt von* P. Stäckel. Il Band: *Geometrie.* Mit. 403 Textfiguren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1909 p. XII-324. (Prezzo del vol. leg. Mk. 6.40).

Con questo volume viene compiuta una pubblicazione su cui ci siamo già intrattenuti (*Bollettino* vol. XII, 1910, p. 52). Nell'annunciarle ricordiamo che la trattazione della geometria proposta dal Borel si apre con un'Introduzione (la quale potrebbe dirsi un trattato di geometria intuitiva) e consta di tre parti, di cui le prime due concernono la geometria di posizione (piano e spazio) e la terza le proporzioni e la misura; onde, in certa maniera trovasi ivi praticata la fusione della geometria con la stereometria. Altro non aggiungiamo trattandosi di un metodo didattico noto da tempo e da tempo giudicato.

G. L.

Fragen der Elementargeometrie Aufsätze von, U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Gastelnuovo, A. Conti, E Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali, *gesammelt und zusammengesetzt von* Federigo Enriques. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.

I. Teil: *Die Grundlagen der Geometrie, mit 144 Figuren im Text.* Deutsche Ausgabe von H. Thieme (1911). 8°. p. X + 366 (Prezzo del vol. leg. Mk. 10).

II. Teil: *Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit.* mit 135 Figuren im Text. Deutsche Ausgabe von H. Fleischer (1907). 8°. p. XII + 348 (Prezzo del vol. leg. Mk. 9).

Di quest'opera, che tanti utili servigi ha prestato a studenti ed insegnanti, venne reso conto in modo assai particolareggiato quando ne uscì l'originale (v. *Bollettino*, III, 1900, p. 77-85) onde non è il caso di addentrarci in una completa analisi di questa traduzione. Noteremo soltanto che la forma esterna venne notevolmente migliorata, essendo le figure divenute più espressive ed esatte, e che tutto il testo venne sottoposto ad una nuova accurata revisione. Inoltre vennero aggiunti due articoli totalmente nuovi: uno del Vailati (l'ultimo scritto che uscì dalla penna del compianto scienziato!) sopra la teoria delle proporzioni, l'altro

Digitized by Google

dell'Enriques, ove, come chiusa dell'intera opera, sono esposte alcune osservazioni generali intorno ai problemi di geometria. Emerge da ciò che l'edizione tedesca della nota *Collectanea* insegna qualche cosa anche a coloro che ne conoscono l'originale.

G. L.

Grundlehren der Matematik für studierende und Lehrer, II Teil, I Band. HERMANN THIEME. Die *Elemente der Geometrie* (Lipsia, Teubner, 1909) XII + 394. [Prezzo Mk 9.].

Il volume, come appare dal titolo sopra riportato, fa parte di un opera più ampia, alla quale col Thieme collaborano E. Netto, C. Farber e W. Fr. Meyer; a quanto crediamo, esso è il primo uscito dell'opera.

L'A. nella prefazione dichiara, che suo scopo nel redigere quest'opera è di render possibile, senza troppo lunghi studii preliminari, una esatta e profonda conoscenza dei fondamenti della geometria e delle varie teorie ad essa attinenti. A questo carattere ci siamo attenuti nel fare le osservazioni, che seguono: quindi non lo abbiamo considerato come un libro scolastico, ma come un libro destinato a persone colte e nel quale non è ammissibile nessuno sviluppo, che non sia del tutto rigoroso.

Lasciando da parte l'osservazione, che se mai il libro darebbe uno solo dei metodi con cui può venir fondata e svolta con rigore la geometria, ben altre osservazioni abbiamo da fare sul modo come la materia è stata trattata dall'A. Di molti dei più facili teoremi non è data la dimostrazione, ed altri questa dimostrazione è data solo per sommi capi: noi non abbiamo nulla da obbiettare sul fatto in generale, dato il carattere del libro, se non che in queste dimostrazioni, specie in quelle più delicate dei principii, si trovano molte affermazioni, che non sono certo d'immediata dimostrazione, e che converrebbe costituissero dei teoremi a sè. Tale fatto non ci pare conveniente, perchè, sopratutto nei principii, è troppo facile, che chi non è esperto della materia, si lasci trascinare dall'intuizione. E questo succede spesso anche all'A. perchè sono moltissimi i punti del libro in cui si fa uso o di proprietà nè postulate nè dimostrate avanti, o di parole, di cui anteriormente non è stato definito il significato. Citiamo qualche esempio tipico, s'intende senza che nulla avanti giustifichi l'ammissione di questa proprietà:

a pag. 26, ammette come dimostrata l'esistenza della perpen-

Digitized by Google

dicolare da un punto ad una retta (il che poteva essere facilmente fatto, dopo aver cambiato l'ordine dei teoremi);

a pag. 32, nel dare la ben nota dimostrazione del postulato di Archimede per gli angoli, ammette, che due semirette colla origine su una retta r, da una stessa parte di questa, e che facciano con r due angoli interni uno retto, l'altro acuto, s'incontrino;

a pag. 96, si trova la parola « Inhalt » o « Flächenmasse » fino allora adoperata, e la sola di cui abbia definito il significato;

a pag. 208, si parla delle proprietà della tangente all'ellisse e della polare di un punto rispetto ad essa senza prima averle definite; lo stesso errore si ripete per l'iperbole e per la parabola, ed uno analogo si ha per le quadriche.

Particolarmente difettosa è poi la trattazione della misura dei poliedri: intanto qui si trova definito il rapporto di due parallelepipedi retti di ugual base, e vengono estese tacitamente alle proporzioni formate con questi rapporti le proprietà di quelle tra 4 segmenti; subito dopo vengono dati dei teoremi su rapporti di prismi, di piramidi senza aver detto prima cosa essi sieno; viene usato il concetto di « Inhalt » di un tetraedro, senza averlo prima definito, e così quello di equivalenza tra corpi rotondi e poliedri, mentre era stata definita solo l'equivalenza tra poliedri.

Infine per citare ancora un esempio: a pag. 102 abbiamo " Il rapporto di due segmenti è uguale al quoziente delle loro misure (*Masszahlen*) prese rispetto ad una stessa unità di misura ". Ora, per la definizione data in precedenza dall'A. il rapporto di due segmenti è ancora un segmento, mentre il quoziente delle due misure, che sono numeri, è naturalmente ancora un numero.

Ma dovrei seguitare ancora un pezzo, se volessi rilevare tutti i punti in cui la trattazione manca di rigore; rileverò solo tre errori materiali: a pag. 19 la dimostrazione del teorema 4 è sbagliata, perchè nel caso di un poligono concavo in cui un lato incontri più di uno dei lati non adiacenti, le affermazioni dell'A. non sono più vere; cosa simile deve dirsi per il teorema analogo di pag. 237; a pag. 311 negli ennunciati dei teor. 3 e 4 va detto, che le superficie poliedriche, di cui si tratta, devono essere convesse, altrimenti i teoremi stessi non sono giusti.

Devo dire ora delle singole parti. I principii della Geometria

Digitized by Google

sono svolti sulla traccia dell'Ingrami (1), prendendo come concetti primitivi quelli di punto, di segmento rettilineo, e deducendone poi quelli di retta, piano, spazio. Però, a causa delle continue manchevolezze, che si riscontrano in questo libro, la trattazione dell'Ingrami è molto superiore; dove quella dell'A. si stacca da quella dell'Ingrami, i difetti si fan più notevoli: per es. quando l'A. vuol definire le parti in cui il piano è diviso da una retta, ricorre alle parti in cui il piano è diviso da un triangolo avente un lato sulla retta data, dimenticandosi poi di far vedere, che la definizione è indipendente dal particolare triangolo considerato. Analogamente per lo spazio. Così nella disuguaglianza tra segmenti e tra angoli i postulati 10_2 e 14_2 sono superflui.

Nelle teorie della congruenza, delle parallele, del calcolo coi segmenti, e in seguito delle proporzioni, della similitudine dell'equivalenza e della misura, l'A. svolge la trattazione *sulla traccia* dell'Hilbert (2). Su esse quindi mi limiterò solo a poche osservazioni. Il postulato delle parallele è sovrabbondante in quanto postula l'esistenza di *una* e una sola parallela per un punto ad una retta. La dimostrazione del teorema di Pappo, che occorre per svolgere la teoria delle proporzioni, secondo il metodo di Hilbert, è stata limitata al caso particolare occorrente, e semplificata. La trattazione viene elegante e semplice, ma io preferirei quella del Kommerell (Math. An. T. 65, 1908) più sintetica e generale. Per la teoria dell'equivalenza delle figure piane l'A. distingue tra poligoni " *flachengleichen* „ (equiv. per somma) e " *inhaltsgleichen* „ (equiv. per differenza); poi raggruppa i due casi sotto il nome di poligoni " *endlichgleichen* „. Nello spazio invece definisce solo poliedri " *endlichgleichen* „ (equivalenti due poliedri limiti di somme di prismi " *eudlichgleichen* „ per somma o per differenza) chiamandoli " *inhaltsgleichen* „. Si noti il diverso uso della parola " *inhaltsgleich* „. Nel piano la distinzione fatta è resa necessaria solo dal fatto, che l'A. non vuole utilizzare il postulato di Archimede, già enunciato fin dal principio; io comprendo la cosa nel libro dell'Hilbert, che ha altri scopi, ma non qui, perchè usando di quel postulato la trattazione viene più

(1) *Elementi di Geometria ad uso dei Licei.* 2. Ediz. Bologna, 1904.

(2) *Grundlagen der Geometrie.* 2. Edizione (ora ne è uscita una 3). Lipsia, 1903.

Digitized by Google

completa ed elegante, e non lascia sussistere una distinzione, che di fatto esiste solo nella geometria non archimedea.

Elegante invece è il modo con cui viene introdotto il senso delle figure; ma vi fa troppo spesso capolino l'intuizione.

Nel libro si trovano anche la trigonometria piana e sferica e quelle teorie che noi comprendiamo di solito nei complementi della geometria. Notevoli due capitoli sulla geometria del triangolo e del tetraedro, uno sull'involuzione di punti e di raggi: l'involuzione è introdotta come l'insieme delle coppie di punti X,Y di una retta, tali che PX.PY=cost., essendo P un punto fisso. Notevole anche il paragrafo intitolato " geometria delle figure sulla superficie sferica " in cui tra l'altro viene svolta la teoria dei sistemi di cerchii sulla sfera, e della proiezione stereografica; il titolo però è improprio facendosi continuamente uso di costruzioni spaziali.

Nel capitolo sui poliedri l'A. tratta anche di quelli di Poinsot e di quelli di Archimede, ma tanto di questi come anche del dodecaedro e icosaedro non vien dimostrata la costruibilità se non intuitivamente. Delle varie relazioni ha gli elementi di questi poliedri neanche un cenno.

Due parti, per me, del tutto inutili sono quelle sulle costruzioni con strumenti assegnati, e quella sui metodi di risoluzione dei problemi; inutili perchè insufficienti, dovendosi esse limitare alla risoluzione di particolari problemi senza potere mai assurgere a concetti generali. Lo stesso devo dire per il capitolo intitolato " proprietà proiettive ", dove si parla di proiettività di fasci di piani e di omografie di forme di 2ª e 3ª specie, di prospettiva centrale e cavaliera, il tutto in 10 sole pagine, per modo che non si ha quasi altro che una lista di definizioni.

Nel libro si trovano anche gli elementi di Geometria analitica del piano e dello spazio; la prima, che tratta anche delle coniche, tolte le solite inesattezze, potrebbe anche bastare a dare una idea di quegli elementi; della seconda dirò solo, che è svolta in 12 pagine, e che poco più di quattro sono dedicate alle quadriche.

Quanto alle conclusioni emergono chiare dalla lunga (troppo forse) esposizione che ho fatta del libro, e quindi mi pare inutile trarle esplicitamente.

SIRO MEDICI.

Digitized by Google

Attualità.

YOSHIO MIKAMI, *Matematical Papers from the Far West*. Abh. zur Geschichte der Mathematik, XXVIII Heft. Leipzig, B. G. Teubner 1910 8°. p. 229. (Prezzo Mk. 10 leg. Mk. 11).

Inseriamo l'annuncio di questo nuovo elemento di una notissima raccolta sotto la rubrica « Attualità », perchè il popolo giapponese si direbbe essere il popolo di moda, non per una vana curiosità, ma perchè è interesse generale il prevedere (se è possibile) l'influenza che eserciterà sopra tutto il mondo il risveglio intellettuale e civile dei nostri fratelli dell'estremo Oriente.

Ora scopo della presente pubblicazione è appunto di darci notizia dei precipui risultati ottenuti dai nostri colleghi giapponesi nel periodo 1890-1905; la semplice indicazione di tale scopo è sufficiente a dimostrarne il grande interesse. Diremo ora qualche cosa del suo contenuto.

Sorvoliamo sopra la breve storia della matematica giapponese, inserita come esordio, perchè si tratta di un brevissimo riassunto di uno scritto anteriore del compilatore della raccolta (cfr. *Bolletlino*, T. IX, 1906, p. 65) e rileviamo invece alcuni articoli (nn. 2-8 e 20) concernenti le proprietà più elementari dei numeri interi, scritti anche in sistemi di numerazione a base diversa da 10. Alla dimostazione di una proprietà della funzione Γ, senza far appello alla teoria generale, è consacrata la nota n. 9; mentre la seguente insegna un metodo di risoluzione delle equazioni cubiche fondata sopra la considerazione di una " riducente " nuova [o tutt'almeno non registrata dal Matthiessen (*Grundzüge der antiken und modernen Algenbra der litteralen Gleichungen* Leipzig 1878 p. 239)], mentre quella segnata col n. 16 indica una considerazione geometrica, più curiosa che utile, per giungere alla risoluzione delle equazioni quadratiche. Molti lavori si riferiscono alle equazioni funzionali (nn. 11, 12, 25, 29, 30, 31); in uno di essi è giustamente osservato (p. 118) un'imperfezione esistente in un ragionamento del Stegmann sulla concoide dello spirale d'Archimede, imperfezione che esige un ritocco alla conseguenza relativa di curve che coincidono con le loro concoidi, dopo una conveniente rotazione; ve ne sono infinite, sono tutte quelle rappresentabili con equazioni polari della seguente formola $\varrho = \frac{b}{a}\omega + f(\omega)$, f essendo una funzione col periodo a. Molti

Digitized by Google

altri lavori concernono argomenti ben noti di analisi: serie (nn. 13, 14, 22, 23, 27), medie (n. 15), elementi del calcolo integrale (nn. 17, 19,) funzioni sferiche (n. 21) funzioni periodiche (nn. 24-26); notiamo fra tali scritti quello (n. 28) che porge un nuovo esempio di funzioni continue senza derivata. Molti altri articoli toccano la geometria elementare; non potendo ricordarne tutti i risultati ci limiteremo a segnalare la dimostrazione della impossibilità di costruire con riga e compasso un triangolo di cui si conoscano le bisetterici (n. 34), una dimostrazione del teorema di Pitagora (p. 227) e lo studio della questione, resa celebre in Europa da J. Steiner, di provare che un triangolo è isoscele se ha due bisettrici fra loro eguali (n. 40). Segnaliamo anche una discussione avvenuta in Giappone sopra la convenienza o meno di attribuire un segno al raggio vettore nell'ordinario sistema di coordinate polari; è curioso che esso ebbe luogo nell'anno 1899, cioè nello stesso tempo in cui io, nei miei studi sopra le curve piane speciali, venni indotto a propormi una questione analoga (cfr. *L'ensei gnement mathématique,* T. I., 1899, p. 357). Altri scritti concernono argomenti geometrici più elevati, cioè curve e superficie differenti da quelle che s'incontrano in un primo studio della geometria; e, al pari di quelli di indole analitica, contengono osservazioni pregevoli, atte a dimostrare che i Giapponesi conoscono lo stato attuale della nostra scienza occidentale, onde nessuno dovrebbe stupirsi se, fra poco, con qualche clamorosa scoperta, essi mostrassero di essere capaci di assurgere, dal grado di discepoli a quello di maestri; non sarebbe da stupirsi trattandosi di un popolo che ha in sè delle mirabili energie latenti e che in altri campi seppe segnare delle orme che il tempo non cancellerà. Se il libro annunciato non avesse altra conseguenza che persuadere i matematici europei di non coprire d'un ingiustificato aprioristico disprezzo gli studi che si vanno facendo nell'estremo Oriente, il suo autore avrebbe ben meritato, non soltanto dalla sua patria, ma anche da tutti i cultori delle scienze esatte.

G. L.

Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages EDUARD KUMMERS, *mit Briefen an seine Mutter und an* Leopold Kronecker. *Herausgegeben vom Vorstande der* Berliner mathematischen Gesellschaft. Mit einem Bildniss E. Kummers (Abh. zur Geschichte der math. Wissenschaften, XXIX Heft. 1910). [Prezzo Mk. 4].

Digitized by Google

Addì 29 Gennajo 1910 si compì il primo secolo della nascita di Edoardo Kummer, il grande geometra che, con Dirichlet e Kronecker, proseguì in modo superiore ad ogni elogio le ricerche sopra la teoria dei numeri inaugurate con colossale successo da C. F. Gauss. La società matematica di Berlino, fedele alle sue abitudini non lasciò passare inosservata una data così memorabile e dedicò la seduta che tenne l'8 Gennajo 1910 a rievocare la figura dell'uomo e dello scienziato; oratore di circostanza fu il Prof. K. Hensel, il quale, nell'assolvere da par suo il grave compito affidatogli, riuscì anche a facilitare l'intelligenza dei più astratti concetti introdotti nella scienza da quel grande e, per così dire, a popolarizzarli.

In appendice a questo discorso si trovano stampate alcune lettere, le une di carattere famigliare, le altre di carattere scientifico; le prime servono mirabilmente a lumeggiare la figura di quel grande ne' primordi della sua carriera, mentre le altre verranno consultate con gran profitto da chi vorrà ricostruire le varie fasi di sviluppo della teoria dei numeri ideali. Per ciò la presente pubblicazione è ben degna del personaggio alla cui memoria è consacrata e del benemerito sodalizio che se ne fece iniziatore. G. L.

Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche.

P. Duhem, *Un précurseur de Capernic: Nicole Oresme (1377)* (Révue générale des sciences 15 Novembre 1909).

N. Oresme per ordine del re di Francia Carlo V. tradusse in francese il trattato *Del cielo e del mondo* di Aristotele ed in premio delle sue fatiche fu nominato vescovo di Lisieux (3 Agosto 1477); egli non si limitò a tradurre il celebre filosofo greco, ma lo commentò e talora lo combattè; in particolare espose chiaramente le ragioni per cui egli non riteneva convincenti le ragioni addotte dal suo autore per dimostrare la immobilità della terra. Tale lavoro dell'Oresme non fu mai stampato ma ebbe in Francia molta notorietà; tuttavia, osserva il Duhem " è possibilissimo che Copernico lo abbia ignorato. Ma d'altronde, quando si legge quello che Copernico scrisse per stabilire la possibilità e la verosimiglianza del movimento diurno della terra, si è colpiti dalle analogie che

Digitized by Google

avvicinano il pensiero del canonico di Thorn a quello del vescovo di Lisieux; e si sarebbe tentati di prendere i capitoli del *De revolutionibus orbium coelestium* per un riassunto troppo conciso ed un po' oscuro, di quello che si trova nel *Traitè du Ciel et du Monde*. Nicola Oresme non fu che il precursore di Nicola Copernico? Non ne fu egli anche l'ispiratore? Poniamo la questione senz'osare di formulare la risposta „. È da augurare che tale pungente problema storico venga ben presto trattato o dall'illustre fisico di Bordeaux o da altri.

C. Alasia, *Essai d'une bibliographie sur la théorie des groupes (de 1771 à 1907)*. A. *Théorie générale des groupes d'opérations* B. *Groupes de transformations continus*. Riv. di Fis., Mat. e Sc. Nat. T. IX-XI.

U. Cerreti, *Sulla origine delle cifre numerali moderne*. Riv Fis. Mat. e Sc. Nat. T. X.

F. Amodeo, *Riproduzione delle questioni sul Trattato « de latitudinibus formarum » di Nicole Oresme fatta da Biagio Pelicani*. Napoli 1909.

H. Bosmans, *Un emule de Viète: Ludolphe van Ceulen. Analyse de son « Traité du Cercle »*. (Louvain 1910).

Se il titolo di questo interessante opuscolo ne esprime completamente il fine e la materia non dice però tutta l'arte spiegata dall'egregio autore per rendere brillante un argomento che sarebbesi detto d'insanabile aridità. Siaci lecito di riferire le conclusioni: " Il calcolo di π ha subito assicurato al *Trattato del cerchio* la massima celebrità; ebbe anzi per risultato di far dare in Germania il nome di *numero ludolfino* al valore di π espresso in frazione decimale, legittimo omaggio reso alla memoria d'un compatriota (si ricordi infatti che van Ceulen era nato a Hildesheim nell'Hannover). Ma il *Trattato del cerchio* merita la nostra ammirazione anche per altre ragioni. Vi si trova, infatti, anzitutto un curioso metodo abbreviato di divisione, il più antico che si conosca, ma che passò sinora inosservato. Poi la teoria delle sezioni angolari, nella quale van Ceulen può essere posto alla pari con Vieta, purchè i due scienziati vengano considerati da punti di vista differenti; ora sotto uno di essi il geometra d' Hildesheim la vince sopra il suo emulo, perchè dimostra le equazioni della teoria delle sezioni angolari che Vieta si contenta di enunciare.

Digitized by Google

Si aggiunga che nella risoluzione delle equazioni di un grado superiore al secondo van Ceulen spiega un'abilità meravigliosa, un talento assolutamente sorprendente nel secolo XVI. Ora ciascuno di tali meriti del *Trattato del cerchio* basterebbe a assicurar all'autore un posto eminente nella storia delle scienze esatte! „

H. Bosmans, *Notes sur l'Arithmétique de Sinmo Stevin.* Louvain. 1911.

Questo scritto comprende due Parti: I. La risoluzione della equazione di 2°. grado nell' " Arithmétique „ di Simone Stevin. II. A proposito di un dubbio di Moritz Canter relativo all'edizione delle " Oevres mathématiques „ di Simone Stevin fatta da Alberto Girad.

H. Bosmans, *La première édition de la « Clavis Mathematica » d' Oughtred. Son influence sur la « Géométrie » de Descartes.* (Annales de la Soc. scient. de Bruxelles, T. XXXV, 1911).

È noto che Wallis, nella sua Algebra e poi in una lettera a S. Morland pubblicata nelle sue *Opere,* ha fatto intendere che Descartes abbia attinto con grande libertà alle opere de' suoi predecessori, specialmente Harriot, Ougtred, Ghetaldi, ecc. Alcune di tali accuse furono dimostrate infondate; ma restava ancora da chiarire quanto si riferiva a Oughtred, questione difficile perchè la prima edizione della *Clavis mathematica* è pressochè irreperibile. Il R. P. Bosmans riuscì a trovarne un esemplare nella biblioteca universitaria di Louvain ed a ragione ritenne prezzo dell'opera presentarne un un'analisi completa, donde emergessero, non soltanto le sostanziali differenze che passano fra essa e le edizioni seguenti, ma anche l'interdipendenza fra quell'opera e la *Géométrie* di Descartes. Egli conclude sostenendo che di plagio da parte del grande geometra francese non è il caso di parlare; ma che la *Clavis* viene naturalmente a prendere posto, in ordine storico, fra i celebri scritti di Viète e di Descartes. Per ulteriori particolari al riguardo rimandiamo i lettori alla dottissima memoria originale.

M. Cantor, *Karl Wilhelm Feuerbach.* (Sitzungsber. der Heidelberger Akad. der Wissenschaften).

Il venerando e venerato storico raccoglie in questa sua pubblicazione tutte le notizie essenziali intorno allo scopritore del

Digitized by Google

« cerchio dei nove punti » ed alle sue opere, mettendone in luce i meriti non comuni; dall'analisi che egli espone degli scritti che il Feuerbach dedicò al triangolo ed al tetraedro sembraci emergere che sarebbe utile ripubblicarli nella collezione dei « Klassiker der exakten Wissenschaften ».

A. Favaro, *Ascendenti e collaterali di Galileo Galilei* (Archivio storico italiano, 1911).

Come lo dice il titolo in questo articolo sono raccolte notizie esatte sopra la vita degli ascendenti del sommo fisico, a partire dalla settima generazione precedente sino al di lui padre Vincenzio.

A. Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo e Galilei.* XXV. *Tommaso Segeth* (Atti del R. Istituto Veneto, T. LXX, 1911).

A prezzo di lunghi e reiterati sforzi l'infaticabile investigatore di Galileo è riuscito a determinare approssimativamente le date estreme (1580,1627) dell'esistenza anche di questo corrispondente del nostro grande connazionale e a stabilire che merita un posto meglio nella storia letteraria che in quella scientifica.

A. Favaro, *Serie ventesimaprima di scampoli Galileiani.* Atti e Memorie dell' Accademia di Padova. Vol. XXVIII, 1912. CXXXIV. *Una ricevuta autografa di Galileo.* CXXXV. *Un autografo di Galileo venduto all'asta.* CXXXVI. *Galileo, Milton e il « Lauro d'Arcetri »* (Dimostrazione dell'origine poetica di un notissiero aneddoto, che ora deve ritenersi per leggenda). CXXXVII. *Aggiunte e correzioni all' Indice Biografico* (Complementi ed aggiunte ai cenni biografici registrati nell'ultimo volume della edizione nazionale delle Opere di Galileo).

A. Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo e Galilei.* XXVI. *Giovanni Wederburn.* XXVI. *Riccardo White.* XXVIII. *Riccardo Willoughby.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXXI, 1911-12, parte II.

Con non poche nè lievi fatiche il Favaro è riuscito a determinare questi tre personaggi, che vissero nell'orbita galileiana, e così ha potuto gettare qualche nuovo raggio di luce sopra i rapporti scientifici fra l' Inghilterra e l' Italia nel periodo precedente la scoperta del calcolo infinitesimale.

Digitized by Google

A. Favaro, *Lettera inedita di Ugo Grozio a Lorenzo Reallio concernente la proposta di Galileo agli Stati Generali delle Provincie Unite dei Paesi Bassi per la determinazione delle longitudini* Ivi. (Supplemento al Carteggio galileano).

G. B. de Toni, *Frammenti Vinciani. Parte quinta. Intorno il codice sforzesco « De divina proportione » di Luca Pacioli e i disegni geometrici di quest'opera attribuiti a Leonardo da Vinci.* (Atti della Societa dei Naturalisti e Matematici di Modena, Anno XLIV, 1911).

Notizie.

Errata. La *Bibliografia matematica* di cui è parola nel primo articolo del precedente fascicolo comprende, non soltanto le opere pubblicate nel corso del Secolo XIX, ma anche quelle che furono stampate nei secoli precedenti; onde il suo valore e l'importanza della sua pubblicazione sono ancora maggiori di quanto risulta del citato articolo.

*
* *

Axel Anthon Björnbo, la cui improvvisa morte (accaduta a Kopenhagen il 6 Ottobre 1911) ha gettato nel lutto tutti i cultori della storia delle scienze positive, era nato a Kopenhagen il 20 Aprile 1874; suo padre era Riccardo Christensen (1), filologo, che, benchè morto giovane, ha lasciato di sè bella fama, mentre sua madre era Anthonore Christensen, pittrice di fiori conosciutissima in Danimarca. Sotto l'influenza e la direzione di J. L. Heiberg e di A. von Braunmühl egli si dedicò alla storia delle matematiche e, durante un viaggio di studi a Roma, raccolse un cospicuo materiale, che gli servì nelle sue memorabili ricerche intorno a Menelao d'Alessandria. Il dolore per la sua improvvisa scomparsa si fa più cocente quando si tenga presente quanti lavori importanti egli abbia lasciati inediti od iniziati. Auguriamo che la vedova, ajutata dai maestri e dai compagni di lavoro del povero estinto, tragga dai manoscritti da lui lasciati nuove opere,

(1) Il figlio mutò il proprio cognome approfittando di una concessione fatta dal governo danese per ovviare agli inconvenienti provenienti dal gran numero di cognomi terminanti in *en*.

Digitized by Google

che indubbiamente saranno capaci di accrescere la rinomanza di cui egli godeva ed il rimpianto che accompagnò la sua immatura dipartita.

*
* *

MATERIALI PER UNA NUOVA BIOGRAFIA DI GAUSS. — È questo il titolo di una nuova pubblicazione iniziatasi dalla casa Teubner sotto la direzione di F. Klein; il primo elemento di essa è una monografia di P. Bachmann *Sopra i lavori di Gauss relativi alla teoria dei numeri.*

Perchè l' Università di Gottinga, che così lodevolmente si adopera a raccogliere tutto quanto può servire a lumeggiare l' imponente figura del « princeps mathematicorum », non ha ancora pensato a ripubblicare il completo carteggio scientifico di quel grande, oggi sparso in un gran numero di scritti difficilmente accessibili?

*
* *

TEMA PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DI MADRID PER L' ANNO 1912: « Studio geometrico della polarità nelle figure del piano e della stella di ordine superiore al secondo ». Nello svolgimento del tema non si possono assumere altri postulati che quelli fondamentali della geometria e si dovrà aggiungere un' Appendice per comprovare algebricamente le conclusioni tratte nel testo del lavoro.

Scadenza 31 Dicembre 1912.

*
* *

PER LA STORIA DELLA CONVERGENZA DELLE SERIE. Uno dei più interessanti periodi della storia della matematica comprende quel centinaio di anni in cui, dall' uso incondizionato di qualsivoglia serie, si è giunti a stabilire la necessità di accertarsi previamente della convergenza di una serie prima di considerarla come un legittimo strumento analitico. Ad esso ha dedicata un' importante memoria H. Burkhardt *(Ueber den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750-1860;* Mathem. Annalen, T. LXX); ove, da un profondo ed accurato studio di tutte le relative fonti, l' autore trae gli elementi per descrivere le discussioni che nacquero al ri-

Digitized by Google

guardo e per assegnare la parte di merito che spetta a ciascuno dei matematici che contribuirono a portare piena luce sopra una questione a cui erano legati il buon nome e l'avvenire dell'analisi.

***

Nuova interpretazione per un passo di Pappo. Nella seduta che tenne l'Accademia di Berlino il 6 Aprile H. A. Schwarz ha fatto una lettura sopra un punto importantissimo del passo della *Collezione Matematica* (ed. Hulsch. p. 652) concernente i " Porismi „ ; di essa trovasi soltanto un brevissimo cenno nel verbale di quell'adunanza, che reputiamo opportuno riferire qui fedelmente tradotto, nell'intento richiamare sopra le idee ivi manifestata l'attenzione degli storici e dei filologhi :

" L'espressione *παρυπτίον* in antitesi a *ἡπτίον* " piano „ significa " non piano „. Alle parole *ἡπτίον ἢ παρυπτίον* bisogna collegare la parola *νκήματου* ; *ἡπτιον νκῆμα* significa una figura geometrica avente la proprietà che tutti i suoi punti e le sue rette appartengano al medesimo piano, invece *παρήπτιον νκῆμα* una figura per cui ciò non succede. I traduttori, di Pappo, per quanto consta all'oratore, hanno adottato un'altra versione di detto passo che risale a Roberto Simon ; ma tale interpretazione non può dirsi pienamente soddisfacente „.

***

Bryn Mawr College Monographs. — Questa collezione di monografie scientifiche abbraccia due Serie : in una sono pubblicati scritti originali, nell'altra sono raccolti articoli pubblicati altrove dagli insegnanti di quella scuola. Il primo dei volumi della II Serie che può interessare i nostri lettori fu pubblicato nel 1904 e contiene scritti di Emilia Norton Martin, Carlotta Angas Scott ed A. Stanley Mackenzie. Un altro volume della stessa Serie porta la data 1909 e contiene scritti matematici di J. E. Wright, Carlotta Angas Scott, V. Ragsadal, ed Eva M. Smith.

***

International association for promoting the study of quaternions and allied systems of mathematics. — Dal *Rapporto an-*

Digitized by Google

nuale pubblicato nel Giugno 1909, paragonato col precedente (v. *Bollettino*, X, 1908, p. 126), risulta che questo sodalizio è stazionario, anzi accenna ad un lieve decremento, il numero de' suoi membri essendo sceso a 63 (tenendo conto della scomparsa del compianto Vailati). Quel *Rapporto* contiene un esteso supplemento alla anteriore « Bibliografia de' quaternioni ecc. » il quale abbraccia dai tre ai quattrocento lavori; per raggiungere tale numero così cospicuo i compilatori hanno incluso degli scritti (come ad es. la celebre memoria di Steiner sopra il baricentro di curvatura delle linee piane) che veramente hanno un legame assai discutibile col calcolo vettoriale. Seguono alcune recensioni sopra opere recenti relativi a quaternioni et similia.

***

NUOVI DOCUMENTI RELATIVI ALLA MATEMATICA MEDIEVALE. — Nella seduta che tenne la Mathematical Association addì 11 Gennajo 1911 il Rev. J. M. Wilson ha fatto conoscere due frammenti di trattati geometrici scoperti nella Biblioteca della Cattedrale di Worcester, dei quali, anzi, ha presentate due fotografie, che furono riprodotte nel fascicolo di Marzo 1911 della *Mathematical Gazette*, assieme al discorso pronunciato in quell' occasione dal Wilson. Uno di quei frammenti appartiene alla celebre *Geometria di Gerberto*. L'altro è un brano di una traduzione latina degli *Elementi di Euclide;* i molti vocaboli di origine araba che vi si trovano la fanno riconoscere come parte della versione degli *Elementi,* fatta dall'Arabo in Latino, da Adelardo di Bath, e provano che questa serviva da libro di testo nelle scuole inglesi sino dal XIV secolo.

***

NUOVE NOTAZIONI ALGEBRICHE. — Dal fondo dell'Africa ci giunge la proposta di un nuovo sistema per designare le funzioni che s' incontrano più di frequente: ne è autore Robert T. A. Innes, il quale nell'articolo *A logical notation for mathematics,* inserito nel fascicolo di Aprile 1911 del *South African Journal of science,* propone di adoperare i simboli S, C, T, L, E, D in luogo risp. di *sen, cos, tang, log, e,* $\frac{d}{dt}$. L' idea è buona; ma riuscirà l'A. a sradicare abitudini volte più secolari?

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

---

d' Adhémar. — Leçons sur les principes de l' analyse. Tome I. L. 11.

d'Arcais. — Analisi infinitesimale. Vol. I per completo. L. 25.

Arnoux. — Essai de géométrie analytique modulaire a 2 dimensions. L. 6.50.

Andoyer. — Nouvelles tables trigonométriques fondamentales (Logarithmes). L. 32.

Bricard. — Géometrie descriptive. L. 5.50.

Czuber. — Vorlesungen üb. Differential u. Integralrechnung I Bd. 3., sorgfaltig durchgeseh. Aufl. m. 125. Fig. L. 16.50.

Dingler. — Die Grundlagen d. angewandt. Geometrie. L. 6.75.

Dumont. — Arithmétique générale. L. 11.

Forsyth. — Lectures on the differential Geometry of Curves and Surfaces L. 30.

Gauss. — Recherches arithmétiques. Nouvelle édit. L. 16.

Godfrey. — A shorter Geometry. L. 4.

Guldberg-Walthénberg. — Theorie linearen. Differengengleichgn. L. 13.

Hauck. — Verlesungen üb. darstell. Geometrie unter bes. Berücksicht. d. Bedürfnisse der Technik. (In 2 Bdn.). I Bd. L. 16.50.

Hegwood et Frechet. — L' équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique. L. 5.50.

Hilbert. — Théorie des corps de nombres algébriques. I. partie. L. 10.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 40. Bd.: Jahrg. 1909. 2. Heft. L. 12.

Kiepert. — Grundriss der Differential ü. Integral-Rechnüng. 2 Th. Neue Aufl. L. 35.

Kneser. — Die Integralgleichungen u. ihre Anwendg. a. d. mathem. Physik. L. 8.

Kowalewski. — Die komplexen Veränderlichen u. ihre Funktionen. L. 16.

Krause. — Theorie der ellipt. Funktionen. m. 25. Fig. L. 5.

Lalesco. — Introduct. à la theorie des équations integrales. L. 4.50.

Loney. — An elementary treatise on Statics. L. 17.

Digitized by Google

von Mangoldt. — Einführung in die höhere. Mathematik. I Bd. L. 16.

Meyer W. Fr. — Über die Theorie benachbarter Geraden u. e. Verallgemeinerung der Krümmungsbegriff. L. 10.50.

Montessus et D' Ahdémar. — Calcul numérique. L. 5.50.

Poincaré. — Leçons sur les hypothèses cosmogoniques L. 13.

Prym u. Rost. — Theorie d. Prymschen Functionen. L. 37.50.

Scheffers. — Lehrbuch d. Mathematik. II Aufl. L. 23.50.

Sommer. — Introduction à la théorie des nombres algebriques. L. 16.

Sthal. — Abriss e. Theorie d. algebraischen Funktionen e. Veränderlichen in neuer Fassung. L. 6.75.

Study. — Vorlesungen üb. ausgewahlte Gegenstände d. Geometrie. 1 Heft: Ebene alg. Kurven u. zu ihnen gehör. Abbildgn. L. 6.50.

Vailati. — Scritti 1863/1909. L. 15.

Weber. — Die partiellen Differential-Gleichungen d. mathemat. Physik. Nach Riemann's Vorlesungen. in 5 Aufl. bearb. 2 Bd. m. 95 Abb. L. 20.

Weitbrecht. — Pract. Geometrie. 3. verb. Aufl. Mit 134 gedr. Abbildungen. ir. 3 Beilagen. leg. L. 6.

Whitehead, Principia Mathematica. Vol. II. L. 40.

Pavia - Premiata Tipografia SUCCESSORI FRAT. FUSI.

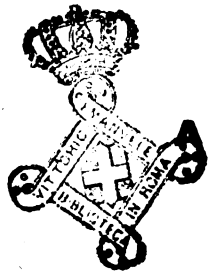
Digitized by Google

W 394

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI

GINO LORIA



ANNO XIV
1912

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1912

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XIV — Luglio-Dicembre — 1912

Opere complete ed Enciclopedie.

Oeuvres de DESCARTES *publiées par* CHARLES ADAM *et* PAUL TANNERY *sous les auspices du Ministère de l' Instruction publique.* 4°. Dodici volumi. Paris, L. Cerf, 1897-1910. (Prezzo di ogni vol. fr. 25).

Renato Descartes nacque a La Haye (Touraine) il 31 Marzo 1596 da cospicua famiglia, non di « grande », come allora dicevasi, ma di « petite noblesse », la quale annoverava fra i propri membri molte persone che si illustrarono nella magistratura o nell' esercizio di professioni liberali (particolarmente nella medicina). Uscito appena dall' infanzia fu posto in educazione (Pasqua 1604) nel Collegio Reale della Flèche (Anjou), istituto godente di ottima reputazione, per merito dei Gesuiti che ne avevano la direzione. Ivi rimase sino al 1712, conservando per tutta la sua vita viva riconoscenza ed ottimo ricordo per dei maestri che avevano saputo infiammarlo di amore allo studio e porlo al corrente di tutto quanto allora sapevasi intorno alle scienze umane e divine. Uscito dal collegio il giovane gentiluomo si pose a girare per il mondo, visitando, non soltanto la sua terra nativa, ma anche l' Olanda, la Germania, l' Ungheria, l' Italia, ecc.; l' itinerario dei suoi lunghi viaggi non è noto che a brani, ma si sa che assistè a molti dei più notevoli avvenimenti accaduti nell' epoca fortunosa in cui divampò la guerra dei Trent' Anni (1618-1648), vestendo talora l' assisa del soldato, ma sempre interessandosi ai luoghi che visitava, agli avvenimenti che svolgevansi sotto i suoi occhi ed alle persone nelle quali s' imbatteva. Tutti i particolari di queste istruttive peregrinazioni non sono giunti sino a noi; ma si è conservato il ricordo di una data singolarmente memorabile, quella del 10 Novembre 1619, in cui, a quanto egli assicura, trovò i fondamenti di una nuova e mirabile scienza. Quale sia la scoperta di cui volle ricordata la nascita non ci è noto con certezza; ma ciò su cui

Digitized by Google

non può cadere dubbio è che l' inverno 1619-20 fu un' epoca decisiva per tutta la carriera del nostro pensatore. Gli è probabilmente allora che egli formulò le quattro famose regole per la ricerca della verità, che servirono a lui di norma durante tutta la vita, e che oggi ancora possono utilmente servire di guida per chiunque si consacri alla ricerca scientifica. Per quanto note giova ricordarle una nuova volta: I. Non accettare per vera cosa alcuna che non si conosca chiaramente per tale. II. Suddividere ogni difficoltà da risolvere. III. Esaminare per ordine le parti, procedendo dalle più semplici alle più complesse. IV. Ritornare sempre sopra quello che si è già studiato per essere sicuri di non avere omessa cosa alcuna.

Nel seguente periodo (1620-28) della sua vita Descartes continuò la sua esistenza randagia, col proposito di applicare le regole da lui formulate a purgarsi dai pregiudizi di cui, vuoi per eredità, vuoi per l'educazione ricevuta, si sentiva imbevuto; egli così spianava il terreno sul quale doveva più tardi costruire! Ed appunto per essere libero dalle pastoje sociali connesse al vivere in contatto con i propri concittadini, alla fine del 1628 decise di prendere stabile dimora all' estero, e scelse, fra i vari paesi in cui aveva già soggiornato, l' Olanda, ove annoverava parecchi cari amici, e che, come contrada protestante, gli assicurava l' incolumità di fronte agli strali di cui la Chiesa cattolica colpiva gli eterodossi di qualsia specie, mutando città di quando in quando, spinto a far ciò dalle esperienze che intendeva compiere o dalla necessità di sorvegliare la stampa delle sue opere.

Il primo periodo di tale soggiorno (Novembre 1628 - Settembre 1629) fu tutto occupato dalla redazione di un breve trattato di metafisica. Da questo soggetto egli fu distolto dalla notizia di un fenomeno astronomico (il parelio) osservato a Roma il 29 marzo 1629, la quale notizia fu l' origine de' sui studi sopra la fisica celeste, durati sino al 1633 ed aventi come coronamento un' opera di considerevole mole intitolata *Del mondo*, ove, fra l' altro, il sistema astronomico di Copernico veniva presentato con marcata predilezione. La condanna pronunziata contro Galileo il 23 Giugno 1633 persuase Descartes di desistere da una pubblicazione che indubbiamente sarebbe stata cagione per lui di noje e di guaj: tale decisione, consigliata da una non ingiustificata prudenza, non può non essere profondamente lamentata,

Digitized by Google

chè la distruzione di quell' opera vieta per sempre di conoscere sotto la forma più genuina e schietta l' essenza della concezione cartesiana dell' universo. Presa tale deliberazione, Descartes si propose di dare alle conclusioni a cui era giunto una forma tale che non prestasse il fianco alle critiche del Sacro Collegio; e non deve avere faticato molto a scoprirla, chè quattro anni dopo vedeva la luce la grande opera destinata a tramandare ai posteri, circonfuso di gloria, il nome di Renato Descartes: è appena necessario che alludiamo al *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences,* seguito dai tre saggi *Dioptrique, Météores, Géométrie.* L' accoglienza che vi fece il mondo degli studiosi fu favorevole, ma non senza contrasti, le lodi furono intramezzate ai biasimi, gli applausi spesso interrotti da fischi, gli *osanna* spesso coperti dai *crucifige,* sicchè i tre anni che seguirono quella pubblicazione furono da Descartes occupati a dissipare le oscurità e rispondere alle obbiezioni più o meno fondate segnalate o rivolte da fisici e matematici di varia levatura, sia direttamente sia per il tramite del P. Mersenne, plenipotenziario di Descartes alla corte del Re di Francia.

Coi filosofi invece egli si trovò alle prese nel successivo decennio (1640-1650) in seguito alla pubblicazione delle *Meditazioni,* dei *Principii della filosofia* e delle *Passioni dell' anima.* In questa stessa epoca egli tenne attiva corrispondenza con la Principessa Elisabetta, e così fu condotto ad illustrare ed applicare le teorie esposte in lavori anteriori; inoltre fece frequenti viaggi in Francia, avendo così occasione di avvicinare Pascal e di spingerlo ad approfondire le celebri esperienze barometriche di E. Torricelli (così ebbe origine la famosa " expérience de Puy-de-Dôme "). Giova notare che la fama del nostro filosofo era allora così diffusa e solida che il Re di Francia (Luigi XIV) gli conferì (1648) una pensione annua di lire tre mila, sperando così di indurlo a rimpatriare; ma senza riuscirvi. Va anche notato che nel frattempo lo Chanut, inviato francese alla corte di Svezia, aveva ripetutamente parlato con frasi entusiastiche di Descartes alla Regina Cristina, la quale era allora tutta infiammata dal nobile desiderio di far qualche cosa di grande, onde mostrare al mondo che i suoi sudditi, omai famosi nell' arte della guerra, per la gloria di cui erasi ricoperto Gustavo Adolfo durante la guerra de' trent' anni, erano altrettanto grandi nelle manifestazioni pacifiche del pensiero. Per ciò espresse ripetutamente il desiderio

Digitized by Google

di avere alla sua corte il più grande filosofo de' tempi suoi; lo Chanut trasmise al suo compatriota ed amico l'espressione di tale onorevolissima brama e parlò con tale eloquenza che (sgraziatamente!) riuscì vincitore della resistenza in origine incontrata. In conseguenza il 1° Settembre 1649 Descartes abbandonò l'Olanda per il regno più settentrionale di Europa. Ivi, sia che il clima riuscisse per lui eccessivamente rigido, sia che troppo grave fosse l'obligo impostogli di dar lezione di filosofia a S. M. durante l'inverno alle 5 del mattino, fatto sta che non tardò a cadere ammalato; sviluppatasi poco dopo una violenta polmonite, egli spirò serenamente l'11 Febbraio 1650, gettando in lutto profondo gli ammiratori e discepoli che contava in tutto il mondo e che da lui ragionevolmente attendevano altre opere degne di lui.

E più d'ogni altro sarà stato costernato lo Chanut, involontaria cagione dell'immatura fine dell'amico suo dilettissimo. Del suo stato d'animo fa fede il monumento che egli si adoperò fosse innalzato a Stoccolma sopra la tomba di Cartesio e le bellissime epigrafi da lui dettate per adornarlo. Questa tomba non fu l'ultimo asilo del grande pensatore; chè nel 1666 i numerosi estimatori che egli aveva a Parigi iniziarono un'agitazione per ottenere che la sua salma venisse dalla Svezia restituita alla Francia; non senza stenti conseguirono lo scopo, ed il 24 Giugno 1667 Descartes venne solennemente inumato nella chiesa de Sainte-Geneviève-du-Mont; sulla sua tomba, oltre ad alcune epigrafi latine destinate ai dotti, vennero incisi i versi seguenti:

Descartes, dont tu voi icy la sepulture
A desillé les yeux des aveugles mortels,
Et gardant le respect que l'on doit aux Autels,
Leur a du Monde entier démontré la structure.
Son nom par mille écrits se rendit glorieux;
Son esprit, mésurant et la Terre et les Cieux
En pénétra l'abîme, en perça les nuages:
Cependant, comme un autre, il cède aux lois du sort,
Luy qui vivrait autant que ses divins ouvrages,
Si le sage pouvoit s'affranchir de la mort.

Da questo tranquillo riposo pensò di toglierlo, un secolo ed un quarto più tardi, l'Assemblea Nazionale per collocarlo nel Pantheon; anzi tale trasporto venne deliberato dalla Convenzione nazionale con decreto de' 2-4 Ottobre 1793 ed ebbe anche un prin-

Digitized by Google

cipio di esecuzione, chè i resti di quel grande furono provvisoriamente collocati nel Jardin Elysée des Monuments français, in attesa dell'apoteosi ufficiale; ma questa non avvenne mai; ed essendo stata deliberata la distruzione di quel giardino monumentale, la salma del filosofo fu inumata nella chiesa di Saint-Germain-des-Près, dove ancor oggi si trova.

La mancata apoteosi di Descartes deve indubbiamente attribuirsi alle vicissitudini politiche che turbarono la Francia nel primo quarto del secolo scorso, non già ad un intiepidimento dei sentimenti di ammirazione per il grande filosofo: stanno a provarlo le varie edizioni che ebbero le sue opere, gl' innumerevoli scritti intesi ad illustrare il cartesianismo in tutti i suoi vari aspetti e l' universale consenso ed il cordiale appoggio che ebbe la proposta di pubblicare, in occasione del terzo centenario della sua nascita, un' edizione completa delle sue *Opere* veramente corrispondente allo stato attuale della critica (il che certamente non può dirsi riguardo alla notissima edizione curata da V. Cousin, 1825-28). Questa proposta, fatta da E. Boutroux nel fascicolo 15 Maggio 1894 della *Revue de métaphysique et de morale*, fu subito caldamente sostenuta dal direttore di questo periodico X. Léon; a tradurla in atto furono concordemente designati P. Tannery e Ch. Adam, a sorvegliarne l'esecuzione E. Boutroux e G. Darboux, mentre la casa Cerf di Parigi s' incaricò della stampa. Quanto oculate e saggie siano state tali scelte risulta dal fatto che entro l' anno 1896 potè venir pubblicato il I Volume e che, malgrado la morte mai abbastanza deplorata di uno dei direttori (P. Tannery), allo spirare del 1910 fu licenziato il XII ed ultimo volume. Crediamo far cosa grata ai lettori dando notizia del contenuto e della mole di ciascun volume, nonchè del giorno in cui ne venne ultimata la stampa:

I. (26 Ottobre 1896). *Correspondance, Avril 1622 — Février 1638.* P. CV. 589.

II. (20 Agosto 1898). *Correspondance, Mars 1638 — Décembre 1639.* P. XXIII. 653.

III. (20 Ottobre 1899). *Correspondance, Janvier 1640 — Juin 1643.* P. 722.

IV. (20 Marzo 1901). *Correspondance, Juillet 1643 — Avril 1647.* P. 708.

V. (20 Marzo 1903). *Correspondance, Mai 1647 — Février 1650.* P. 660.

Digitized by Google

VI. (20 Novembre 1902). *Discours de la méthode et Essais.* P. 660.

VII. (28 Dicembre 1904). *Meditationes de prima philosophia* P. XVIII + 612.

VIII. (22 Dicembre 1905) *Principia philosophiae. Epistola ad G. Voetium. Lettre apologétique. Notae in programma.* P. XVIII + 712.

IX. (31 Dicembre 1904). *Méditations et Principes, traduction française.* P. X + 245 + XX + 358).

X. (20 Marzo 1908) *Physico-Matematica. Compendium musicae. Regulae ad directionem ingenii. Recherche de la vérité. Supplément de la correspondance.* P. 691.

XI. (10 Giugno 1909). *Le monde ou traité de la lumière. Description du corps humain. Passions de l'âme. Anatomica varia.* P. XXIV + 710 + VIII.

XII. (15 Dicembre 1910) *Descartes, sa vie et ses oeuvres (étude historique).* P. XIX + 646.

La riproduzione delle opere a stampa del celebre filosofo venne fatta con la cura più scrupolosa, tenendo conto di tutte le edizioni precedenti e delle notizie relative somministrate da scrittori posteriori o coevi e da tutti gli altri documenti manoscritti esistenti in pubbliche o private biblioteche. La stampa fu fatta con caratteri elzeviriani fusi appositamente sopra carta filigranata speciale; i frontispizii delle più reputate edizioni delle opere furono riprodotti con i più perfezionati sistemi che oggi offre la tecnica tipografica; delle persone che ebbero col filosofo rapporti di amicizia o di corrispondenza è data una breve ma succosa biografia, sicchè tutto il mondo scientifico di cui egli fu centro si presenta dinanzi agli occhi di chi legge con mirabile chiarezza, e chiunque in avvenire vorrà studiare le sue opere non avrà bisogno di compulsare le edizioni precedenti, la presente essendo sufficiente a porgergli tutte le notizie di qualsia specie lo possano interessare. Nè mancano (nell' ultimo volume) parecchi ritratti del grande scienziato e qualche paesaggio relativo ai luoghi da lui abitati.

Pei lettori del *Bollettino* presentano uno speciale interesse i vol. VI e X, giacchè il primo contiene, oltre ad uno scritto che dovrebbe formar parte della preparazione scientifica di qualunque giovane, un' opera matematica veramente classica, mentre nell' altro si trovano raccolti gli altri contributi dati da Cartesio

Digitized by Google

alla geometria: basti nominare il frammento relativo ai poliedri, per la prima volta presentato sotto forma completamente intelligibile, le osservazioni sopra la quadratura del cerchio, che servirono poi di stimolo ad Eulero per compiere una sua notevole ricerca, e quel brano, dal titolo *Calcul de mons. Descartes*, fino ad ora noto soltanto ai lettori del *Bulletin des sciences mathématiques.*

Oltrechè sopra questi volumi, va richiamata l'attenzione dei lettori sopra i cinque volumi contenenti il carteggio di Descartes, chè essi completano in modo mirabile il quadro della sua produzione scientifica. In generale è noto che le lettere scientifiche dei dotti, nell'epoca in cui il giornale scientifico non esisteva ancora, facevano l'ufficio delle comunicazioni preventive sopra ricerche in corso ed in parte anche delle critiche e repliche, a cui oggi sono destinati i periodici bibliografici; anzi il tono confidenziale che caratterizza una lettera privata permette una libertà di parola ed un abbandono non consentiti da scritti destinati a venire stampati. E realmente i colpi dati da Descartes ai suoi avversari, con quel fare altezzoso e sprezzante ben noto a chi ne abbia letto qualche pagina, lasciano tali lividure che ricordano quelle impresse da Dante ai propri nemici, tanto che, a distanza di tre secoli, non sono ancora scomparse. Essi rendono ancora più impressionanti e significanti le lodi che egli a larga mano ha tributato a Desargues, di cui il nostro filosofo, forse per primo, misurò l'imponente grandezza: il che è tanto più notevole giacchè gli sfuggì (od almeno sempre negò) il valore delle opere di B. Cavalieri (*Oeuvres* T. IV, p. 394) ed E. Torricelli (id. p. 553).

La persona con cui egli corrispondeva di preferenza era il Mersenne, che, sino alla morte, ebbe l'ufficio di suo rappresentante a Parigi; come tale il celebre Padre gli trasmetteva le critiche, le obbiezioni, le questioni che riceveva dagli studiosi della filosofia cartesiana, comunicando poi a questi le risposte che ne riceveva dal suo illustre corrispondente; spento il Mersenne, si presentò come candidato alla successione il Carcavi, ma la morte di Descartes, avvenuta poco dopo, gli vietò di fare a lungo la parte di agente autorizzato. Molte altre lettere furono scambiate fra Descartes e la celebre Principessa Elisabetta, sua devota discepola ed ardente ammiratrice, a cui egli dedicò anche una sua opera. Altri corrispondenti furono persone per varie ragioni famose; ricordiamo Costantino Huygens, Fermat,

Digitized by Google

Desargues, Schooten, Frénicle, Mydorge, Pascal padre, Arnould ecc. Gli argomenti trattati si può dire abbraccino tutto lo scibile: fisica e metafisica, libero arbitrio e progetto di una lingua universale (T. I, p. 76), problemi geometrici particolari e teoria delle equazioni, costruzione delle tangenti a linee speciali, quadrature, cubature, ecc. sempre considerate da un punto di vista originale e generale. Alcune lettere posseggono tale valore che oggi si direbbero vere e proprie memorie scientifiche (v. ad es. T. II, p. 22 e 307), mentre altre (storica imparzialità impone di riconoscerlo) contengono inesattezze o veri errori (v. ad es. T. III p. 554,658) indubbiamente prodotti da precipitazione nello scrivere; per compenso certi squarci di lettere contengono risultati che la scienza ha registrati nei propri fasti (T. III p. 708) o che fanno fede di un intuito meraviglioso capace di porre in grado chi lo possiede di precorrere i tempi suoi.

Nel loro insieme le lettere di Descartes costituiscono il più attendibile e completo commento alle sue opere, ma nei particolari porgono notizie intorno a ricerche ed a metodi di cui altrove cercherebbesi indarno qualche traccia; chi ad es. potrebbe dedurre dalle opere di Descartes che egli ha volto il pensiero alla teoria dei numeri, alla costruzione di un cerchio tangente a tre altri ed alla « razionalizzazione » di un' espressione contenente radicali? Eppure il suo carteggio sta a provare che di questi argomenti e di altri congeneri egli si è occupato e non senza frutti! Se, quindi, uno storico credesse di potere delineare e colorire un quadro completo della produzione scientifica cartesiana basandosi esclusivamente sopra i suoi scritti a stampa, commetterebbe un' errore gravido delle più deplorevoli conseguenze. Ben se n'avvidero i contemporanei ed i posteri di Descartes, i quali raccolsero con amorosa cura ed in più occasioni pubblicarono il suo carteggio scientifico. L' edizione che oggi ci sta sott' occhi possiede tutti i caratteri delle edizioni definitive: chè, non soltanto il dettato di ogni lettera venne fissato mediante ricerche profonde, ma gli editori hanno raccolte e presentate tutte le informazioni desiderabili intorno alla storia ed allo stato attuale degli originali. L' importanza dei risultati ottenuti è dimostrata dall' ultimo volume dell' opera di cui ci occupiamo, chè ivi l'Adam, con la scorta costante delle lettere, ha potuto narrare una storia della vita e delle opere del grande filosofo, infinitamente più esatta, completa e degna di fede di quante

Digitized by Google

erano state scritte prima. Possa egli in un avvenire non lontano completare degnamente la grande opera a cui è legato il suo nome col darci quella " storia del Cartesianismo „ a cui fece allusione più volte; nessuno più e meglio di lui è indicato per scrivere questa pagina importante della storia della filosofia.

G. L.

E. B. Christoffel. *Gesammelte mathematische Abhandlungen. Unter Mitwirkung von* A. Krazer *und* G. Faber *herausgegeben von* L. Maurer. I. Bd. *mit einer Biographie E. B. Christoffels von* C. F. Geiser *und seinem Bild in Lichtdruck sowie* 15 *Textfiguren* (p. XVI-382). II Bd. *mit 18 Figuren* (p. 343). Leipzig, B. G. Teubner, 1910, 8° (Prezzo Mk. 34).

Segnaliamo ai nostri lettori questo nuovo anello della collana di Opere complete dei suoi grandi matematici che va incessantemente costruendo la dotta Germania. La nuova raccolta che oggi si aggiunge alle molte già esistenti concerne un matematico la cui produzione non è di gran mole, ma ha segnato un passo in avanti in tutte le direzioni in cui si è svolta; ben lo sanno i lettori degli *Annali di matematica*, che ivi lessero alcuni importanti lavori del Christoffel, scritti in italiano! Con la presente ristampa non solo saranno rimessi in circolazione idee e metodi originali e fecondi, ma verranno posti in evidenza certi lati dell'attività scientifica di questo matematico, per avventura non abbastaza noti.

G. L.

Hermann Grassmann, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke.* III Bandes II Teil: *Grassmanns Leben geschildert von* Friedrich Engel, *nebst einem Verzeichniss der von Grassmann veröffentlichten Schriften und einer Uebersicht des handschriftlichen Nachlasses.* Mir 3 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1911, 8°. p. XVI, 400 (Prezzo mk. 18).

Questo volume completa e corona ben degnamente il significante monumento con cui la Germania volle eternare la memoria di uno dei più originali fra i suoi figli (1), quasi volesse con tale postumo omaggio rimediare all'incurante indifferenza sotto cui seppellì al loro apparire le pubblicazioni del povero professore del Ginnasio di Stettino.

(1) Per i volumi precedenti v. Bollettino. T. VI, p. 89 e T. IX, p. 21.

Digitized by Google

Esso è totalmente opera del Prof. Engel, ed è occupato nella maggior parte da una biografia del Grassmann, scritta con tanta scrupolosa diligenza, da poter gareggiare con quelle che il Valson consacrò a Cauchy e che il Königsberger scrisse di Jacobi e di Helmholtz. Per comporla egli attinse a tutte le più attendibili fonti di notizie: carteggi privati e atti ufficiali, ricordi di famiglia e testimonianze di colleghi e discepoli; e così riuscì a presentare un quadro parlante della vita esteriore ed interiore del suo eroe, a fare opera esauriente, che dovrà in avvenire servire come modello a tutti coloro che si accingeranno a lavori congeneri. Con la scorta di essa narreremo brevemente gli avvenimenti che contrassegnarono il passaggio su questa terra dell'inventore dell'*Ausdehnungslehre*.

Senza risalire (come fa l'Engel) l'albero genealogico, ricorderemo che suo padre (Justus Günther), nato a Sinzlow il 19 Giugno 1779, fu suo predecessore nella cattedra che egli doveva occupare per la miglior parte della sua esistenza e che, con l'opuscolo *Ueber den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre*, lo instradò verso il genere di ricerche che dovevano condurlo all'immortalità. Egli nacque il 15 Aprile 1809 a Stettino ed ivi percorse con ottimi risultati in tutte le materie il suo corso secondario. Munito di una licenza di I grado, datata 17 Settembre 1827, egli si recò a Berlino per frequentarvi quella Università, assieme ad un fratello maggiore. Sopra gli anni di studi universitari l'Engel porge i più minuti ed interessanti particolari, giovandosi dalle lettere che ancora si conservano dirette alla famiglia dal futuro matematico; da esse risulta che egli, senza trascurare la musica, si dedicava con assiduità ed impegno a studi storici, teologici e linguistici, ma che non frequentò alcuna delle lezioni matematiche; alla stessa epoca appartiene il primo de' suoi viaggi, che egli compì verso il Mezzogiorno, con lo stesso fratello che gli era compagno di studi.

Nell'Autunno 1830 Grassmann ritornò sotto il tetto paterno per prepararsi all'esame di diploma che lo abilitasse all'insegnamento nelle scuole secondarie: avendo superate felicemente tutte le prove prescritte, il Governo Prussiano gli rilasciò in data 22 Maggio 1834 la relativa patente. In conseguenza egli potè presentarsi come candidato alla cattedra di matematica della « Gewerbeschule » di Berlino, vacante per la promozione di Steiner a Professore universitario; le sue aspirazioni furono soddisfatte in data 17 Ottobre di detto anno.

Digitized by Google

Ma ivi non doveva rimanere a lungo; chè a partire dal 1° Gennaio egli ottenne, dietro sua domanda, di ritornare nella sua cara città natale, in qualità d'insegnante nella « Ottoschule ». Membro attivo della Società di Fisica fondata da suo padre, si occupò con amore della disciplina che segna il confine fra la geometria e le scienze naturali, cioè la cristallografia: frutto di tali studi è lo scritto *Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung*, pubblicato nel 1839 nel « Programm der Ottoschule ».

Malgrado le occupazioni ufficiali, che lo facevano pendere verso le scienze positive, Grassmann non aveva mai abbandonata l'idea avuta sin dall'adolescenza di dedicarsi totalmente alla teologia; per ciò nel 1838 chiese di subire un nuovo esame teologico ed in pari tempo chiedeva di subire un esame da cui risultassero le sue cognizioni matematiche e fisiche. Il caso (forse aiutato; ma è questo un punto su cui, malgrado reiterati sforzi, non fu possibile all'Engel di fare piena luce) favorì il nostro, chè il Professor Conrad, a cui fu affidata la direzione delle relative prove, gli diede come tema della prescritta dissertazione la " Teoria del flusso e del riflusso del mare „, tema che già era stato studiato nella Società fisica di Stettino. Il nostro lo svolse con un metodo originale, in cui si trovano in germe le idee direttive della sua vita scientifica; e nell'occuparsene sentì rivelarsi invincibile la propria vocazione, sicchè da quel momento abbandonò la teologia per dedicare tutte le proprie forze alle scienze esatte, ove sentiva di potere lasciare un'orma indelebile. Quella dissertazione (che venne riprodotta nell'edizione delle *Werke*) inviata alla Commissione esaminatrice il 20 Aprile 1840, assieme ai risultati delle altre prove regolamentari, gli procurò in data 1°. Maggio la desiderata patente di abilitazione. Essa prelude alla *Theorie der Centralen*, pubblicata nel 1840 nel *Giornale* di Crelle, ed alla celebre opera *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin dargestellt und durch Anwendung erläutert. Erster Teil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend*, venuta in luce a Stettino nel 1844.

Questa pubblicazione doveva rappresentare per l'A. una grande delusione, la prima che gli preparava il suo tragico destino, giacchè non riuscì a far concentrare su quel lavoro l'attenzione dei matematici; non di Gauss, che accampava a sua scusa altre occupazioni, non di Möbius, su cui Grassmann non a torto faceva

Digitized by Google

assegnamento, il quale si diceva non in grado di comprendere e giudicare la parte filosofica di quel libro. Sicchè, nell' impossibilità di trovare chi si assumesse di renderne conto in un periodico scientifico, il Grassmann si ridusse a pubblicarne egli stesso un riassunto nell' *Archivio* di Grunert (T. IV, 1845). Ma nemmeno ciò valse a far aprire gli occhi dei contemporanei, pei quali l'*Ausdehnungslehre* rimase simile al libro dell'Apocalisse. Fortunatamente ciò non valse a scoraggiare il nostro scienziato, il quale nel 1845 dava in luce due importanti memorie, una di fisica (*Neue Theorie der Elektrodynamik*), l' altra destinata a far parte della seconda parte della sua grande opera (*Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse*); pubblicate, la prima negli *Annali* di Poggendorff, la seconda nel *Giornale* di Crelle.

A tener viva la speranza di tempi migliori sopravvenne nello stesso anno 1845 un fatto nuovo, e cioè che la Società Jablonowski proponeva come tema di concorso la divinazione della « caratteristica geometrica » ideata da Leibniz, in base ai pochi frammenti superstiti. Il Grassmann, per suggerimento del Möbius, decise di cimentarsi alla prova, e si propose di mostrare come i metodi da lui immaginati soddisfacessero pienamente alle condizioni poste da Leibniz al procedimento che trattavasi di divinare: è noto che la memoria di Grassmann fu premiata e che venne pubblicata nel 1846 accompagnata da uno scritto illustrativo del Möbius stesso.

Nello stesso anno il Grassmann pubblicò, assieme a W. Lagbein, un libro scolastico (un *Deutsches Lesebuch*) destinato ad un grande successo, chè ebbe non meno di otto edizioni, e nel seguente tentò una rivendicazione di priorità in confronto al Saint-Venant; e nel 1847 spedì al Ministero dei Culti del Regno di Prussia la sua *Ausdehnungslehre* e la memoria premiata, accompagnandole con un' istanza intesa ad ottenergli una cattedra universitaria; quei lavori, inviati, per averne un parere tecnico, al Kummer, furono giudicati in modo sfavorevole: ciò risulta da una Relazione, pubblicata dall'Engel, dalla quale emerge che il grande matematico non era riuscito a rendersi conto della saggezza che s'ascondeva sotto il velame della forma insolita, in cui erano scritti i lavori di Grassmann; in conseguenza il Ministero respinse l' istanza ricevuta, o, ciò che torna lo stesso, ne rimandò l' esaudimento ad epoca indeterminata.

Digitized by Google

Maturavan intanto gli eventi che dovevano portare al fatidico anno 1848, e Grassmann non potè sottrarsi all'influenza dello spirito rivoluzionario che agitò tutti gli animi nel periodo 1844-1847; ed infatti noi lo troviamo allora redattore di un giornale politico edito dal fratello Roberto. Ma questa scorreria nel campo politico, come l'analoga di Jacobi, fu di breve durata. Il 10 Agosto 1848 egli si fidanzò a Maria Teresa Knappe, a cui il seguente 12 Aprile si congiunse in matrimonio; circa nello stesso anno 1849, con lo studio del Sanscrito, egli iniziava quegli studi di filologia che dovevano esser per lui fonte di grandi soddisfazioni. Morto suo padre il 9 Marzo 1852, fu chiamato a succedergli nel patrio Ginnasio come quarto « Oberlehrer ». Sorvoliamo sopra ricerche da lui compite intorno alla teoria della musica, sopra altri reclami di priorità da lui accampati contro Cauchy e sopra il suo carteggio con Möbius, così ricco di interesse scientifico. E notiamo come egli riapparve nella schiera dei matematici attivi con una memoria *Sur les différents genres de multiplications* pubblicata nel 1855 nel *Giornale* di Crelle, nella quale egli si propose il bel problema di determinare tutti i vari sistemi di numeri complessi a più unità. Allo stesso anno appartengono altre cinque memorie sopra la generazione delle curve e delle superficie, la cui redazione risale però al 1852. Il destino che si mostrò sempre così spietatamente avverso al nostro matematico gli negò persino la soddisfazione di sapere che W. R. Hamilton, il creatore della teoria di quaternioni, aveva lette ed apprezzate a dovere le sue ricerche, come risulta dal suo carteggio con A. de Morgan degli anni 1852-53.

Nel 1861 egli pubblicò la prima parte del suo *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* (1), trattato scritto in istile rigorosamente euclideo, da cui eminenti trattatisti posteriori attinsero inspirazione e lume; l'anno seguente si decise a fare un nuovo tentativo per assicurare il successo alle proprie idee col pubblicare il volume intitolato: *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet* (2). Ma senza resultato! Se è vero che un'opera la quale trovi subito benevola accoglienza è da dirsi superflua, in quanto non porta nessun con-

(1) Notiamo che nel 1865 egli fece stampare un *Lehrbuch der Trigonometrie* che fa sistema col *Lehrbuch der Arithmetik*.

(2) Anche questa di forma prettamente euclidea.

Digitized by Google

tributo originale al patrimonio intellettuale dell' umanità, gli scritti del Grassmann portano indubbiamente le stigmate di grande originalità! Ma anche se qualcuno avesse fatto notare ciò al Grassmann, non avrebbe per fermo potuto consolarlo della spietata indifferenza dei matematici del tempo suo, la quale si rispecchiava nelle ripulse che incontrava ogni qualvolta tentava di ottenere una cattedra universitaria. Non solo: l' antipatia del Grunert per la sua opera scientifica si rifletteva in appunti ingiustificati contro la sua azione didattica (che si trovano consegnati in documenti ufficiali pubblicati dall'Engel), i quali spinsero il Grassmann a giustificati e non totalmente sterili lamenti. Ci esprimiamo così perchè, quando nel 1868 fu creata nell' Università di Greifswald una seconda cattedra di matematica, il Grunert, soltanto per mostrarsi gentile verso di lui, lo spinse a schierarsi fra i concorrenti, senza però giungere a vincere l' opposizione che questi incontrava, sia per l' età avanzata, sia per la sua fisionomia scientifica, in seno di quel corpo accademico.

Ciò non ostante stavano per sorgere giorni migliori! Hermann Hankel, nel preparare la sua ben nota *Theorie der komplexen Grössen und ihrer Funktionen* si era imbattuto nei lavori di Grassmann, ne aveva compreso l' alto significato (v. la citata *Theorie* p. 16) e verso la fine del Novembre 1866 si era posto con lui in corrispondenza epistolare; poco dopo (1869) il Clebsch si manifestava entusiasta dei metodi di Grassmann, non soltanto privatamente ma anche in un' occasione solenne, quale quella offertagli dalla necrologia di Plücker. Tale nuovo orientamento nel modo di giudicare l'*Ausdehnungslehre,* ebbe per effetto un ritorno di Grassmann alla matematica, che egli aveva abbandonato per la filologia, dopo constatato l' insuccesso anche della sua opera del 1862. Da ciò l' origine delle pubblicazioni matematiche da lui fatte nel quadriennio 1872-1876, le quali, se non aggiunsero nulla di sostanziale ai suoi risultati precedenti, valsero però a diffonderne la conoscenza ed a farli meglio apprezzare con nuove applicazioni. Nè va taciuto che in questo periodo stesso egli ebbe il piacere di vedere le sue idee soggetto di un commento e di un tentativo di popolarizzazione da parte di un matematico che era stato per breve tempo suo collega: alludiamo al *System der Raumlehre* di V. Schlegel, pubblicato in due parti negli anni 1872 e 1875.

Hermann Grassmann è morto a Stettino il 26 Settembre 1877,

Digitized by Google

senza avere potuto assistere alla comparsa della II edizione della *Ausdehnungslehre* del 1844, dovuta alle insistenze di un egregio fisiologo, il Preyer. Ciò non ostante a lui fu concessa, sia pur tardivamente, la gioia di sentire le proprie idee apprezzate ed i suoi metodi in procinto di far parte integrante delle scienze matematiche. Di ciò fanno fede le parole di elogio pronunciate da vari eminenti scienziati, che il Prof. Engel riferisce verso il termine del suo magnifico lavoro. A noi Italiani incombe però l'obblico di far notare che il Cremona non si è limitato a semplici espressioni di elogio per l'originalissimo geometra; ma sino dal 1860, in una nota pubblicata nelle *Nouvelles Annales de Mathématiques,* segnalava ai geometri ed applicava abilmente i concetti ed i metodi dell'*Ausdehnungslehre.* Questo fatto andava da noi rilevato, perchè torna ad onore tanto del nostro celebre compatriota, quanto del geometra alla cui memoria è consacrata la magnifica opera che abbiamo analizzata. G. L.

Geometria costruttiva.

T. Vahlen, *Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung. Eine Engänzung der niederen, eine Vorstufe der höheren Geometrie.* Mit. 127 Figuren in Text, 8°, p. XII + 349. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911. [Prezzo Mk. 10, leg. Mk. 11].

F. Klein ha, uno dei primi, osservato che fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento superiore non esiste sufficiente connessione, e si è sforzato da par suo ad ovviare al grave inconveniente che in conseguenza ha luogo nel piano di studi di tutte le nazioni, mediante pubblicazioni che raggiunsero grande notorietà ed esercitarono notevole influenza. In tale via egli fu seguito da F. Enriques, a cui devesi una ben nota *Collezione* (cfr. p. 50) ove tutte le più importanti questioni relative alla geometria elementare sono lumeggiate da specialisti competenti. Terzo fra cotanto senno interviene ora il Vahlen, il quale si propose, col volume che oggi annunciamo, di completare quanto s'insegna di geometria nelle scuole medie e di preparare il terreno in cui dovrà seminare il professore universitario. Come dice il titolo che reca, il volume in questione consta di due parti distinte, una concernente le costruzioni *esatte,* l'altra quelle che non possono condurre che ad un risultato *approssimativo*: le esamineremo separatamente.

Digitized by Google

Seguendo il costume che venne adottato da qualche anno in questa parte, l'A. divide tutto il campo geometrico in tre regioni: geometria *projettiva*, geometria *affine* (caratterizzata dall'intervento della retta all'infinito), geometria *metrica* (nella quale si presentano i punti ciclici del piano). In conseguenza divide in tre Capitoli ciascuna delle tre prime parti della sua opera, le quali sono dedicate risp. alle *Costruzioni lineari*, *Costruzioni quadratiche* (traducibili in formole in cui non entrano che radici quadrate) e *Costruzioni cubiche* (che conducono ad equazioni risolubili mediante estrazioni di radici di indici 2 e 3). L'A., dopo di avere esposte le generalità relative a ciascuna di siffatte categorie di questioni, enumera i più notevoli casi particolari che ne vennero sinora considerati: così, non solo presenta di questi un quadro completo, ma scopre le relazioni che intercedono fra le varie soluzioni che ne vennero date finora, ne insegna di nuove ed apre l'adito alla scoperta di altre. Trattando delle questioni metriche quadratiche era forse il caso di parlare anche della risoluzione geometrica delle equazioni quadratiche in generale e del caso particolare classico che ne presenta la divisione di una retta in media ed estrema ragione.

La IV parte, ultima di quelle relative a costruzioni esatte, completa le tre prime trattando delle costruzioni traducibili in equazioni algebriche di grado superiore a 4 o in equazioni trascendenti; i temi trattati sono chiaramente indicati dai titoli dei sette Capitoli che la formano e che sono:

I. Estrazioni di radici e divisioni di angoli in parti eguali.

II. Costruzioni trascendenti relative alle anzidette questioni.

III. Elementi immaginari, criteri di realtà, geometria numerativa.

IV. Geometrografia e teoria degli errori d'osservazione.

V. Costruzioni per posizioni speciali dei dati.

VI. Divisione del cerchio, della lemniscata e della lemniscatoide; poligoni di Poncelet.

VII. Costruzioni nello spazio.

In parecchi punti di questa parte l'esposizione è molto concisa, tanto da divenire una semplice relazione di risultati altrui, non sempre chiara per chi non conosca già l'argomento; ma in molte altre circostanze l'A. riesce a rendere intelligibile anche ai principianti certi risultati che toccano le parti più elevate della scienza nostra; in generale si può dire che è più felice quando parla in

Digitized by Google

nome proprio, di quando si fa eco di parole altrui, caso d'altronde non infrequente.

Passando a trattare di *Approssimazioni*, l'A. osserva che i problemi che più di spesso diedero occasione a soluzioni vicine ma non coincidenti col vero sono quelli della duplicazione del cubo, della divisione d'un arco circolare in parti eguali e della rettificazione di un tale arco. La storia di quest'ultima questione offre tre distinti periodi. Nel primo, che va da Archimede alla scoperta del Calcolo infinitesimale, si tratta di approssimazioni *numeriche*, giacchè lo scopo che ci si propone è di rappresentare la circonferenza come un multiplo razionale del diametro. Nel secondo periodo si è invece studiato il carattere analitico di π e delle funzioni collegate a questo numero. Finalmente all'ultimo tali studi vengono spinti ulteriormente sino a condurre alla conclusione che π è un numero trascendente. L'A. stende un pietoso velo sopra le sterili fatiche dei pretesi quadratori del cerchio e dedica a quei tre periodi le sezioni V, VI e VIII, mentre nella VII egli aduna il materiale analitico che gli serve per stabilire nella seguente sezione i celebri teoremi di Hermite e Lindemann. In questa seconda metà del suo libro l'A. ha raccolto e genialmente ordinato un materiale immenso, in parte generalmente noto, ma in parte esistente in Programmi scolastici clandestini o in raccolte inaccessibili a quasi tutti, aggiungendovi del suo quà e là qualchecosa e spessissimo metodi di dimostrazione elementari e riuscendo talora (v. p. es. pag. 281 e 319) a rettificare certi dati storici erronei diffusissimi.

Per la eventualità non improbabile di una nuova edizione esprimiamo il desiderio che venga aggiunto (p. 280) un cenno sopra i procedimenti *elementari* (cioè indipendenti dall'uso delle serie) per calcolare i logaritmi e raccomandiamo una maggior cura nell'ortografia dei nomi propri (p. 18 Appollonius per Apollonius, p. 52 Frussae per Férussac, p. 62 L. de Ferrari invece di L. Ferrari, p. 100, 110, 330 Bernouilli invece di Bernoulli, p. 121 Berent per Berner, p. 175 Enneström per Eneström). È ancora da avvertire che *Elgé* (p. 102) è un pseudonimo di cui si servì parecchie volte G. de Longchamps, e che le ricerche di C. Juel sopra le *Curve grafiche* sono di natura totalmente differente da quelle esposte negli altri lavori citati nella prima nota a piedi della pag. 136.

G. L.

Digitized by Google

L'ultimo teorema di Fermat.

D. N. Ranucci. *Risoluzione dell'equazione* $x^n - Ay^n = \pm 1$ *con una nuova dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat*, Roma, Tipografia pontificia, 1911: 8°, 23 p. (Prezzo L. 2).

Anche il signor Ranucci ha voluto portare il suo sassolino al monumento di amenità che si va elevando sulla tomba del male ispirato donatore del famoso premio; il quale, anzichè essere riservato a chi dimostrerà il teorema di Fermat, dovrebbe essere diviso tra i critici che si sobbarcano al fastidio di scoprire i punti deboli delle pretese dimostrazioni. Fortunatamente nell'opuscolo del signor Ranucci i punti deboli sono a fior di pelle, e qualunque modesto flebotomo sarebbe in grado di metterli a nudo. In poche parole, il nostro autore dà come necessarie e sufficienti certe condizioni che sono soltanto sufficienti, e ciò gli apre la via a dimostrare colla massima facilità il classico teorema. Ecco alcuni dei suoi errori; e per metterli in chiaro mi valgo senz'altro di esempi numerici.

a). " Condizione necessaria e sufficiente, perchè l'espressione $x^n - 1$ ammetta un fattore della forma y^n, è che sia $x - 1 = y^n$ " (pag. 4).

Posto $n = 3, x = 10, y = 3$, si ha:

$$x^n - 1 = 999 = 3^3 . 37, x - 1 = 9,$$

sicchè $x^n - 1$ ammette un fattore cubico senza che $x - 1$ sia un cubo.

Ma, qui mi interromperà il lettore, come riesce l'autore a dimostrare una cosa così manifestamente falsa? Non la dimostra affatto; e si limita a spendere otto linee per stabilire la sufficienza, che è evidentissima.

Ed ora continuiamo.

b). " Condizione necessaria e sufficiente, perchè l'espressione $x^n + 1$ ammetta un fattore della forma y^n, è che sia n dispari, ed $x + 1 = y^n$ " (pag. 6).

Posto $n = 3, x = 8, y = 3$, si ha:

$$x^n + 1 = 513 = 3^3 . 19, x + 1 = 9.$$

c). " Le due espressioni $x - 1$, ed $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$, non ammettono alcun divisore comune, e sono prime tra loro, fuorchè nel caso che sia $x = n + 1$ " (pag. 7).

Digitized by Google

Posto $n=4, x=3$, si ha:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1=40, x-1=2,$$

che non sono primi tra loro, benchè non sia $x=n+1$.

d). " Le due espressioni $x+1$, ed $x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1$, „ sono sempre prime tra loro, quando non sia $x=n-1$ „ (pag. 8).

Posto $n=9, x=2$, si ha:

$$x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1=171, x+1=3,$$

che non sono primi tra loro, benchè non sia $x=n-1$.

e). "..... il polinomio $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$ non ammette al- „ cun fattore elevato a potenza n-esima „ (pag. 8).

Posto $n=4, x=7$, si ha:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1=400,$$

che ammette il fattore 2^4.

f). "..... questa „ (l'equazione $x^n-Ay^n=1$) " non può mai „ sussistere, se $y=ny_1$ „ (pag. 13).

Posto $n=3, x=10, y=3=3.1, A=37$, l'equazione è soddisfatta.

Dai risultati *a*), *c*), *e*) segue subito la dimostrazione del teorema di Fermat (pag. 21).

Essendo:

$$z^n-y^n=(z-y)(z^{n-1}+z^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}),$$

i due fattori del secondo membro sono primi tra loro; inoltre, affinchè sia $z^n-y^n=x^n$, deve il primo fattore essere una potenza n-esima, mentre il secondo non lo è. Dunque l'eguaglianza è impossibile.

Se non altro, la dimostrazione ha il merito della semplicità!

KARNASCH, Ingenieur-Major a. D. *Beweis II für den Fermatschen Satz, dass die Gleichung* $x^n+y^n=z^n$ *in ganzen Zahlen nicht lösbar ist, wenn* $n>2$. 2 ergänzte Ausgabe. Berlin, Mayer & Müller, 1911: 4°, 12 p. [Prezzo Mk. 1.60].

Questo secondo tentativo del signor Karnasch non è, a nostro avviso, più fortunato del premio (v. *Boll.* XII, 1910, p. 59-60). Dopo aver posto ancora $z=x$; $b=y+a$, e trovato nel caso di $n=2$:

$$b=2a\left(\frac{\frac{x}{a}-1}{2}\right)^2,$$

Digitized by Google

l'autore aggiunge: Se si conoscesse l'espressione di b per l'esponente n e si facesse in essa $n=2$, si otterrebbe il valore trovato. Quindi b per l'esponente n deve pure constare di 3 fattori, etc. Non occorrono parole per dimostrare l'illegittimità di tale conclusione.

N. Villani. *L'equazione di Fermat* $x^n + y^n = z^n$ *con dimostrazione generale*, Lanciano, Masciangelo, 1912: 8°, 21 p.

Anche questa dimostrazione è inesatta. L'errore sta in ciò, che, dall'essere un numero divisibile per altri due (che nel caso considerato non sono mai primi tra loro), si deduce che esso è divisibile per il loro prodotto (p. 11, l. 1-2).

E. Lussan. *Essai de démonstration générale du théorème de Fermat*, Paris, Gauthier-Villars, 1911: 8°, 11 p.

Basta riferire il seguente ragionamento: Se a^n è divisibile per p, a deve essere divisibile per $\sqrt[n]{p}$, e quindi p deve essere la potenza n-esima di un numero intero.

J. G. Schaller. *Beweis des grossen Fermatschen Satzes. Nebst Anhang*, Grabow i. Meckl., Selbstverlag des Verfassers: 8°, 23 p.

Posto:

$$a^n + b^n = (a + b - x)^n,$$

l'autore, con una serie di calcoli non meno lunghi che inutili, trova due espressioni in a, b, n, x, segnate coi numeri 15 e 16, che per comodità indicheremo con P, Q, e che — come si verifica facilmente — sono tra loro identiche; e si affanna a dimostrare che non possono essere eguali. Qui egli commette un primo errore, affermando che si ha sempre:

$$Q - \frac{1}{2} P > 0,$$

mentre p. es. per $n=3$ risulta:

$$Q - \frac{1}{2} P = 3ab^2 - b^3;$$

da questa falsa premessa deduce che, se $P \leq 0$, non può essere $Q=P$. Osserva poi che $Q - \frac{1}{2} P$ non contiene x, e conclude che,

Digitized by Google

se questa differenza non è $= \frac{1}{2}$ P in un caso, non può esserlo mai. Importa notare che nelle sue considerazioni egli non fa mai uso della condizione che x debba essere razionale intero; il che è più che sufficiente per giudicare del valore delle sue conclusioni.

Ma c'è una seconda dimostrazione molto più semplice.

Dice l'autore: Come c'è un segmento limitato da due punti (enti a 0 dimensioni) che è somma di altri due segmenti, così c'è un numero che è somma di altri due. Come c'è una figura piana limitata da tre rette (enti a 1 dimensione) tale che il quadrato costruito sopra uno dei tre lati è la somma di quelli costruiti sugli altri due, così c'è un quadrato somma di due altri. Come non c'è un corpo limitato da tre piani (enti a 2 dimensioni), così non c'è un numero cubico somma di due altri. Come non ci sono enti limitati da corpi o da enti a più di 3 dimensioni, così non c'è una potenza quarta o superiore che sia somma di due o più potenze simili.

Lungi da noi l'idea di confutare tali ragionamenti; facciamo solo osservare che:

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5 .$$

Che ne dice il signor Schaller?

A. Kempe. *Der Fermatsche Satz. Versuch einer Beweisführung dieses Satzes*, Amsterdam, Versluys, 1912: 8°, 15 p.

L'autore, dopo aver distinti vari casi, dimostra per ciascuno di questi, non già che l'equazione di Fermat è impossibile, ma che è " molto verosimile " (" sehr wahrscheinlich ") che lo sia. Però, chiudendo il suo opuscolo coll'enunciato del teorema di Fermat, aggiunge prudentemente: " Wir schreiben aber — errare humanum est — ein s. e. e. o. daneben ".

G. Vivanti.

Determinanti.

E. Netto, *Die Determinanten*. 8°. p. VI-128. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910 [Prezzo Mk. 3.25].

È questo il vol. 9 di una collezione già favorevolmente nota a tutti i cultori delle scienze esatte, cioè della raccolta di " Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studie-

Digitized by Google

rende „. È notevole che i determinanti siano stati reputati indispensabili alla cultura degli ingegneri; però la trattazione di tale teoria fu tenuta nel presente volume in limiti molto modesti, avendo con ragione l'A. mirato a raggiungere più la semplicità, che il rigore. Ecco gli argomenti trattati: I. Definizioni e proprietà elementari dei determinanti. II. Elementi aggiunti. Il teorema di Laplace. III. Calcolo di determinanti. IV. Prodotto di determinanti. V. Matrici. Rango. VI. Determinanti speciali. VII. Le equazioni lineari. VIII. Risultante, eliminante, discriminante. IX. Sostituzioni lineari. X. Applicazioni geometriche. XI. Differenziazione dei determinanti. XII. I determinanti funzionali.

G. L.

Attualità.

FELIX MÜLLER, *Gedankentagebuch für Mathematiker*. III Auflage, 8°, p. 121. Leipzig, B. G. Teubner, 1912. [Prezzo Mk. 2].

Molti calendari a fogli staccabili contengono per ogni giorno una data relativa ad artisti, letterati, grandi capitani o uomini politici; ma generalmente non vi compare alcun cultore della matematica, dell' astronomia o della fisica. Tale osservazione indusse nel 1879 il dotto autore a raccogliere pazientemente le notizie necessarie per comporre un " Calendario matematico „; egli comunicò al pubblico il risultato de' suoi studi nel 1904 in occasione del III Congresso internazionale dei matematici. Una seconda edizione di tale lavoro uscì nel 1908. La terza, che ora ci si presenta, supera di gran lunga le precedenti per esattezza ed estensione. L' autore, bibliografo consumato, ben sa che un'opera di tal genere non può mai ritenersi perfetta, onde lasciò per ogni pagina una contropagina bianca destinata alle aggiunte; ciò permette anche di trasformare il suo volume, con l'aiuto di un paio di forbici, in un calendario matematico. Adorna il volume un riuscitissimo ritratto dell' autore.

G. L.

Raccolte d'esercizi.

Register op de Wiskundige Opgaven uitgeven het Wiskundig Genootschap « Een onvermoide arbeid komt alles to boven » gedurende het tijdsverloop van 1875-1910. Amsterdam, H. C. Delsman, 1911. 8°, p. 4 + 370.

Digitized by Google

Fra le Società matematiche una delle più venerabili per età e rispettabili per la benefica azione esercitata è quella che ha per sede Amsterdam. Fedele al suo motto, da tempo essa tutela e dirige tre pubblicazioni periodiche di considerevole valore. Due fra esse sono ben note ai nostri lettori; alludiamo al *Nieuw Archief voor Wiskunde,* di cui nel 1911 venne pubblicato il IX Volume della II Serie, ed alla *Revue sémestrielle des publications mathématiques,* di cui sta per esser pubblicato il XX volume. Meno nota è una terza opera periodica, destinata a fungere da nobile palestra pei giovani matematici; infatti col mezzo di essa quella Società propone ogni anno una serie di questioni matematiche sopra svariati soggetti, e fa conoscere le migliori fra le soluzioni pervenutele entro un determinato tempo. Tale sistema venne inaugurato nel 1875 e poi continuamente mantenuto; esso ha prodotto dieci volumi di " Problemi matematici „ (*Wiskundige Opgaven*), di cui il volume che annunciamo dà l'indice, il quale costituisce la più ricca e svariata raccolta di questioni sopra tutti i rami della matematica superiore che noi conosciamo. La verità di tale asserto risulta dal seguente elenco degli argomenti trattati: *Equazioni. Teoria dei numeri. Probabilità. Determinanti. Serie. Frazioni continue. Identità. Limitazioni. Calcolo integrale. Equazioni differenziali. Equazioni funzionali. Funzioni. Triangoli. Quadrangoli e poligoni. Circoli. Altre figure piane. Tetraedri. Poliedri. Sfere. Altre figure solide. Coordinate. Coniche. Cubiche piane. Quadriche piane. Altre curve piane. Cubiche gobbe. Altre curve gobbe. Quartiche. Superficie algebriche. Altre superficie. Rigate. Congruenze rettilinee. Complessi di rette. Corrispondenze e trasformazioni geometriche. Geometria a* n *dimensioni. Geometria cinematica. Meccanica.*

L'indice dei nomi fa conoscere gli autori delle questioni proposte, fra cui si trovano i più bei nomi della matematica olandese, a partire da Huygens sino a quelli ancora viventi.

Una raccolta quale è quella che annunziamo possiede una notevole virtù suggestiva, onde sarebbe desiderabile che la sua azione si estendesse anche all'infuori della stretta cerchia di persone capaci di leggere un libro olandese; onde *facciamo voti che la benemerita Società matematica di Amsterdam completi la sua opera promovendo una traduzione francese, tedesca od inglese del volume di cui ci siamo occupati.*

G. L.

Digitized by Google

Teoria delle superficie.

A. B. Basset, *A treatise on the geometry of surfaces.* 8°, p. XVI + 291. Cambridge, Deidghton, Belland Co. 1910.

Il sig. Basset è noto ai nostri lettori siccome autore di una buona esposizione delle principali proprietà delle cubiche e delle quartiche piane; è poi noto a tutti coloro che si occupanô di geometria come assiduo e dotto investigatore delle singolarità delle curve e delle superficie algebriche. Tali studi gli fecero nascere l'idea di comporre un trattato atto a sostituire l'*Analytic geometry of three dimensions* del Salmon, la cui ultima edizione conta ormai più di un quarto di secolo e, d'altronde, è esaurita; a tale meritoria impresa egli si è preparato prendendo conoscenza di quanto sull'argomento è stato scritto, specialmente in Italia, e sforzandosi di dargli aspetto uniforme e consentaneo alle abitudini generali della sua terra. Così, per quanto concerne la sostanza, noteremo che nel suo libro scarseggiano le considerazioni geometriche, e, riguardo alla forma, è evitato l'uso delle notazioni con uno o più indici, così famigliari ai matematici (provetti o novellini) del continente. Che sempre egli sia riuscito, coi suoi commenti, a rendere del tutto chiari gli autori a cui si è ispirato sarebbe dir troppo: ma, nel giudicare, conviene tener presente chi si tratta d'indagini assai delicate, recenti, sui risultati delle quali non venne certamente ancora detta l'ultima parola: sicchè il *Treatise* in esame è presumibilmente un'opera di transizione.

Nel I Cap. l'A. espone le principali proprietà generali di una superficie algebrica e delle superficie ad essa invarianti (Hessiana, Steineriana, ecc.). Nel seguente Cap. ne fa applicazione alla teoria ed alla classificazione delle superficie cubiche. Delle curve gobbe e delle sviluppabili tratta il Cap. III, donde si apprendono le celebri formole che corrispondono nello spazio a quelle di Plücker. Dopo una utile digressione (Cap. IV) intorno alle singolarità composte delle curve piane, l'A. si occupa a lungo delle singolarità puntuali delle superficie algebriche (Cap. V) e così ha i mezzi per studiare con sufficiente larghezza le superficie di quart'ordine (Cap. VI). Egli poi investiga le proprietà speciali delle superficie rigate (Cap. VII) e poi ritorna alla teoria generale per occuparsi (Cap. VIII) della " theory of residuation „ le cui origini risalgono a Sylvester, e dei piani tangenti singo-

Digitized by Google

lari delle superficie algebriche (Cap. IX). Complementi di vario genere si trovano nell'*Appendice.*

Come si vede il campo percorso dal sig. Basset è meno ampio di quello abbracciato dal Salmon, perchè sono escluse tutte le considerazioni di geometria differenziale, non si parla dei sistemi di superficie, sono escluse le trasformazioni birazionali, ecc.; per compenso il tema delle singolarità è studiato più a fondo nel nuovo che nell'antico trattato, benchè in quello non esista alcuna traccia dei vari " generi „ che si è trovato necessario considerare in ogni superficie algebrica.

L'A. ha saputo assimilare benissimo molta scienza continentale e per ciò è degno dei nostri rallegramenti; ma ha abbandonato l'ottimo sistema inglese di intercalare fra le teorie degli esercizi e per ciò non sappiamo lodarlo. G. L.

Geometria Projettiva.

Th. Reye, *Die Geometrie der Lage. Vorträge.* I *Abtheilung.* V verbesserte und vermehrte Auflage. Mit. 98 Abbildungen im Text. Leipzig, A. Kröner 1909. 8°, p. VIII-256. (Prezzo del vol. leg. Mk. 8). III Abtheilung. IV, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit. 3 Abbildungen im Text. Leipzig, A. Kröner, 1910. 8°, p. VIII+253. (Prezzo del vol. leg. Mk. 8).

Dopo l'ultima volta che ci siamo occupati di quest'opera (*Bollettino* T. XI, 1908 p. 37-38), l'A., colpito dalla legge sopra i limiti d'età, ha abbandonata la cattedra che egli occupava a Strassburgo sin dall'epoca in cui l'Alsazia fu incorporata alla Germania. Ma queste nuove edizioni di alcune parti di tale opera stanno a dimostrare che egli non si è sentito di abbandonare le armi con cui da tempo combatte da valoroso. Assistito, con figliale affetto, dal Prof. Jolles, egli apportò al suo lavoro notevoli migliorie di sostanza e di forma (notiamo ad esempio la esposizione della teoria staudtiana degli immaginari), sicchè, ancora oggi, esso costituisce la miglior guida per chi voglia conoscere *tutte* le questioni geometriche che si possono risolvere col solo sussidio del puro ragionamento. È inutile dire che chi ha seguito anche nelle sue fasi più recenti l'attività scientifica dell'illustre autore, ritroverà nella III parte cose a lui note, ma esposte sotto una forma che meglio ne fa comprendere la connessione con quanto costituisce l'odierna geometria di posizione.

G. L.

Digitized by Google

HERMANN GRASSMANN, (jr.) *Projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt.* I Band: *Binäres.* Mit 126 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1909 8°. gr. p. XII+360 (Prezzo Mk. 12; leg. Mk. 13).

Al grande Ermanno Grassmann la sorte ha negata una cattedra universitaria (cfr. p. 73-9): il suo vivo e legittimo desiderio di esporre in una scuola superiore le originalissime sué idee non potè mai essere sodisfatto; più benigno fu il destino verso suo figlio, attualmente prof. a Giessen, il quale con la presente pubblicazione (commemorativa del I centenario della nascita del suo celebre genitore) intende completare l'impresa iniziata con tre programmi scolastici (1894-96-98), mostrando come il calcolo vettoriale sia un mezzo eccellente per esporre la geometria projettiva.

Nel presente volume egli limita le proprie considerazioni al campo binario. Tale volume consta di tre parti.

La I è consacrata all'esposizione dei concetti fondamentali dell'« Ausdehnungslehre »: addizione e sottrazione di punti e di segmenti, moltiplicazione esterna, moltiplicazione progressiva e regressiva, prodotto planimetrico; essa si chiude con alcune applicazioni delle moltiplicazioni planimetriche.

La II è invece consacrata a stabilire i concetti fondamentali della geometria projettiva: doppio rapporto, forme di I specie projettive, generazione delle coniche con forme di prima specie fra loro projettive, ecc.

Gli è nella III parte che l'A. entra nel suo tema, perchè mostra in qual modo il calcolo geometrico guidi con sufficiente semplicità e naturalezza a tutte le proposizioni che vennero scoperte sopra le projettività nel campo binario, considerate separatamente od a gruppi. Questa parte è interessante, oltrechè per il metodo uniforme usato, perchè presenta un quadro completo di quanto si conosce sull'argomento; essa sarà, quindi, consultata con profitto anche da chi vuole orientarsi in un campo che venne coltivato da svariati autori e considerato da punti di vista assai differenti.

Il particolareggiato indice con cui si apre e l'indice alfabetico con cui si chiude rendono agevole il consultare e l'usare il volume annunziato.

G. L.

Digitized by Google

Analisi Vettoriale.

R. Gans. *Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik.* Zweite Auflage. Mit 35 Figuren im Text. 8°, p. X-126. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1909. (Prezzo del vol. leg. Mk. 3.60).

Riferendoci, per quanto concerne gli scopi e l'architettura della presente operetta, a quanto ne dicemmo in occasione della prima edizione (v. *Bollettino*, IX, 1906, p. 20), noteremo che essa si è arrichita di un interessante Capitolo sopra i « Tensori » di cui ecco in breve il contenuto:

Definizione e rappresentazione geometrica d'un tensore; funzione vettoriale lineare. Tensori particolari. L'ellissoide d'inerzia; il moto del giroscopio. Spostamenti infinitesimi. Tensioni. Le deformazioni e le pressioni in coordinate ortogonali generali.

Non v'ha dubbio che, grazie a tali miglioramenti, il volume del Prof. Gans saprà conservarsi il favore di cui gli fu largo finora il pubblico matematico.

G. L.

Geometria descrittiva.

R. Bricard, *Géométrie descriptive.* Paris, O. Doin, 1911, 8°, picc. p. 269.

U. Perazzo, *Lezioni di geometria descrittiva.* Torino, Tip. degli Artigianelli, 1910, 8°, p. 576 con un Atlante di 75 tav. lit.

F. von Dalgwick, *Vorlesungen über darstellende Geometrie,* I Bd. *Die Methoden der Parallelprojektion.* Mit 184 Figuren im Text und auf 12 Tafeln. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1911, 8°, p. XVI-363. (Prezzo del vol. leg. mk. 13).

Guido Hauck, *Vorlesungen über darstellende Geometrie unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik, herausgegeben von* A. Hauck. I Band mit 650 Textfiguren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912, 8°, p. XII + 339. (Prezzo, Mk. 10, leg. Mk. 12).

Il volume del Bricard fa parte dell'*Encyclopédie scientifique publiée sous la direction du Dr. Toulouse* e più precisamente della *Bibliothèque de mathématiques appliquées* diretta da M. d'Ocagne,

Digitized by Google

onde potrebbe ritenersi una guida per un primo studio della geometria descrittiva; invece si rivolge a lettori i quali, non soltanto abbiano una grande famigliarità con la concezione delle figure solide limitate da piani e rette, ma dispongano di vaste cognizioni sull' applicazione dell' analisi alla teoria delle curve e delle superficie: di quest' ultimo fatto va tenuto conto per non ascrivere il presente volume fra le esposizioni " pure ,, mentre all' opposto può a ragione venir citato come prova dell'opportunità di erigere la scienza creata da Monge sopra una larga e profonda base analitica. Nei primi undici Capitoli il metodo della doppia projezione ortogonale viene esposto nelle sue linee generali (Cap. I), e poi applicato ai problemi fondamentali sulla retta ed il piano (Cap. III) ed allo studio e rappresentazione dei poliedri (Cap. IV), delle superficie in generale, in particolare dei coni e cilindri (Cap. V), della sfera (Cap. VI), delle superficie di rivoluzione (Cap. VII), delle quadriche (Cap. VIII), delle superficie rigate (Cap. IX) e delle elicoidi (Cap. XI). In un intermezzo (Cap. III) sono esposti i procedimenti per effettuare i cambiamenti di piani di projezione, le rotazioni ed i ribaltamenti, con numerose applicazioni, ed in altro (Cap. X) le nozioni sulla curvatura delle superficie a cui si deve ricorrere per risolvere certe questioni di geometria descrittiva. Il Cap. XII tratta di ombre, il XIII del metodo dei piani quotati e il XIV delle projezioni assonometriche. Chiude il presente volume un breve cenno sopra alcune applicazioni della geometria descrittiva alla scienza dell' ingegnere ed all' astronomia, mentre ad altro volume viene rimandata la trattazione delle projezioni oblique e della projezione centrale.

Come si vede, l'A. ha saputo condensare in poche pagine molte cose; ma, benchè il suo stile sia piano e lucido, pure il lettore che vuole apprendere col suo aiuto la geometria descrittiva deve disporsi ad un lavoro non indifferente, essendo evidente che l'A. si volge a persone che pensino e siano disposte a sforzarsi di comprendere le cose appena accennate, tanto più che le figure, ridotte alla loro forma più semplice (la linea di terra è tracciata solo per eccezione, quando sia indispensabile) porgono un aiuto non molto considerevole (1) e sono ridotte al

(1) A riprova citiamo la fig. 28 (p. 51) relativa all'intersezione di un cubo con un piano passante per il centro.

Digitized by Google

numero assolutamente indispensabile (p. es. dell' ottaedro regolare non è data la rappresentazione). Notevoli sono le rappresentazioni del dodecaedro e dell' icosaedro regolari; esse sono ottenute con una sapiente disposizione di tali solidi rispetto agli elementi di riferimento, frutto di uno studio approfondito delle loro proprietà: per compiere tale studio l'A. a ragione suggerisce l'uso di modelli; ma noi dubitiamo che questo aiuto basti, perchè un modello fino ad un certo punto abilita a scoprire le relazioni di parallelismo, ma difficilmente lascia scorgere condizioni di ortogonalità fra rette e piani. Ad ogni modo questa osservazione di natura esclusivamente di didattica pratica nulla toglie al valore teorico del *metodo di Bricard* per rappresentare quei due solidi, il quale probabilmente e ragionevolmente, a titolo d' onore, verrà designato in avvenire con tale nome.

Per due ragioni il volume del Perazzo si accosta a quello del Bricard; perchè si rivolge a persone non destinate a divenire scienziati di professione (sono lezioni destinate agli allievi della R. Accademia militare) e perchè l'A. fa uso di considerazioni analitiche, in luogo degli antichi ragionamenti di geometria infinitesimale sintetica, tanto cari ai professori di un tempo. Ma, contrariamente a quanto fa il Bricard, il Perazzo scioglie tutte le difficoltà che presume presentarsi al principiante, onde il suo libro potrebbe benissimo servire anche per chi volesse imparare da solo la geometria descrittiva; anche riguardo alle figure è impressionante il contrasto col Bricard; chè il Perazzo ne presenta non meno di 1310, disegnate in scala un po' piccola, ma con cura amorosa. Sono svolti tutti i metodi di rappresentazione di uso più frequente (metodo di Monge, piani quotati, projezione centrale ed assonometria) nè manca un cenno sopra la teoria delle ombre; le figure a cui sono applicati sono quelle che a ragione si considerano per classiche.

Sopra la terza delle opere, il cui titolo sta scritto in testa del presente articolo, il giudizio non può esser definitivo, trattandosi di un I Volume. In essa si rispecchiano le lezioni che l'A. da un decennio tiene all'Università di Marburg; nel redigerle egli si è inspirato a lavori precedenti che a ragione si considerano come ottimi; dal seguente indice delle materie emerge che egli nella scelta, se non nella distribuzione delle materie, si è in gran parte attenuto ai modelli classici:

Digitized by Google

I[a] Parte: *Metodo di Monge.* I. Punto e retta. II. Il piano; i punti e le rette in esso contenuti. III. Piani e rette fra loro perpendicolari. IV. Affinità. V. Complementi ai Capitoli precedenti. VI. Poliedri e superficie particolari semplici in posizioni speciali. VII. Poliedri in posizioni generali; ombre; rotazioni. VIII. L' ellisse come curva affine al cerchio. IX. Coni e cilindri di rotazione; ombre. X. Costruzioni indipendenti dall'uso delle tracce dei piani. XI. Sezioni piane dei solidi, in particolare dei poliedri. XII. Sezioni piane del cono rotondo. XIII. Sezioni piane o ombre della sfera. XIV. Intersezione di due poliedri. XV. Intersezione di due superficie curve. XVI. Problemi stereometrici vari. XVII. Problemi sul triedro. XVIII. Superficie di rotazione. XIX. Generalità sulle quadriche. XX. L'elica e le principali superficie elicoidi. XXI. Metodi di projezione centrale pel tracciamento delle carte geografiche.

II[a] Parte: *Prospettiva parallela ed assonometria.* XXII. Fondamenti della prospettiva parallela. XXIII. Problemi sopra punti, rette e piani in prospettiva parallela. XXIV. Altri problemi sopra i poliedri in prospettiva parallela. XXV. Assonometria.

Chiude il volume un'*Appendice* costituita da parti eterogenee, ma molto interessanti. Nella I sono dati utili ammaestramenti per coloro che vogliono addestrarsi nel disegno geometrico. La II insegna alcuni procedimenti pratici per rettificare un arco di cerchio. Dalla III si apprendono alcune applicazioni del metodo di Monge a problemi astronomici. Ancora più importante è la IV Parte, giacchè dà la prima pubblica notizia intorno ad alcune importanti innovazioni apportate dal Prof. Rodenberg alla teoria delle ombre, delle quali sinora non si aveva che qualche vaga informazione grazie ad una conferenza di A. Schmid pubblicata nel 1901 negli *Unterrichtsblätter für Math. und Naturw.* Chiude il volume una succosa esposizione del Metodo dei piani quotati.

Lo stile dell'A. non è eccessivamente conciso; le figure illustrative sono eseguite con cura, in parte sono intercalate nel testo, ma per lo più stanno in apposite tavole litografate. Il lettore troverà enumerati, nell' opera in discorso, anche i vari strumenti a cui oggi il disegnatore può ricorrere per aiuto.

Alla benintesa pietà figliale di Alfredo Hauck siamo debitori se l' eminente opera didattica di Guido Hauck continua la sua azione benefica anche dopo che la sua voce si è spenta per sempre.

Digitized by Google

Le bellissime e numerosissime figure che adornano l'ultimo dei volumi a cui è consacrata la presente rassegna servono ad attestare, anche a chi non ne abbia notizia per altra via, quelle straordinarie qualità di disegnatore possedute dal compianto professore del Politecnico di Berlino, che tanto contribuivano a renderne efficaci ed attraenti le lezioni; e va rilevato lo sforzo costante da lui spiegato per esonerarsi dall'uso di lettere nelle figure, sforzo di cui è agevole rendersi ragione quando si pensi che i tecnici usano sempre disegni senza lettere, onde è bene addestrarli fino dalla scuola ed evitarne l'uso. Del resto le innovazioni arrecate dall'illustre geometra alla risoluzione dei problemi della geometria descrittiva (almeno per quanto risulta dal presente volume) non sono di tale momento da esigere da parte nostra una particolareggiata menzione, onde basterà che noi, come facemmo in casi analoghi, riferiamo quì l'indice degli argomenti da lui svolti:

I. Parte: *Metodo della doppia projezione e sua applicazione a figure limitate da piani.* 1. Rappresentazione di punti, rette e piani mediante projezioni. 2. Rappresentazione di rette e piani mediante le loro tracce. 3. Costruzioni stereometriche. 4. Trasformazioni. 5. Poliedri. 6. Sezioni piane ed intersezioni di poliedri.

II. Parte: *Metodi assonometrici.* 7. Projezione ortogonale. 8. Projezione obliqua.

III. Parte: 9 Trasformazioni geometriche.

IV. Parte: *Curve.* 10. Curve piane. 11. Curve di second'ordine. 12. Curve gobbe. 13. L'elica del cilindro retto circolare.

V. Parte: *Superficie sviluppabili.* 14. Superficie in generale. 15. Superficie sviluppabili.

VI. Parte: 16. Superficie non sviluppabili in generale. 17. Superficie di rotazione. 18. Quadriche. 19. Superficie topografiche.

VII. *Superficie rigate gobbe.* 20. Rigate in generale. 21. Rigate di second'ordine. 22. Rigate di grado superiore. 23. Superficie rigate elicoidi.

G. L.

Didattica.

Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn. Im Auftrage der mathematischen Reformkommission des Landesvereins der Mittelschulprofessoren, nach dem Ungarischen

Digitized by Google

Original unter Mitwirkung der Herren M. Ballog *und* J Rados *deutsch herausgegeben von* E. Beke *und* S. Mikola. 8°, p. VI + 160. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

Nella lussureggiante fioritura di scritti didattici che si ha da un decennio a questa parte il presente volume è destinato a conseguire, senza opposizione, un posto eminente. Frutto del lavoro concorde dei rappresentanti di un popolo che, avendo da poco tempo raggiunta l'autonomia politica, anela ad affermare la propria personalità in tutti i campi in cui svolgesi l'azione dell'ingegno umano, esso accaparra subito la simpatia del lettore, come tutti quelli che portano l'impronta di un ragionevole ma coraggioso filoneismo. E poichè tratta tutte le questioni che oggi si vanno discutendo fra coloro che si occupano di pedagogia matematica, va segnalato a coloro a cui sta a cuore l'evoluzione lenta ma incessante che subiscono i metodi di insegnamento delle scienze esatte.

Il movimento di cui è attestazione il presente volume ebbe origine in Ungheria per effetto di una conferenza tenuta nel 1906 dal Prof. Beke, in occasione di una riunione di professori di scuole medie; scopo di tale conferenza (che ben a ragione trovasi riprodotta in testa al presente volume) era di dare notizia dei tentativi di riforma dell'insegnamento matematico fatti in Francia, Germania, ecc. e di spingere l'Ungheria a seguirne l'esempio; tale e tanta fu l'impressione che essa produsse nei convenuti che la presidenza del congresso, per mandato avutone, formò subito una commissione di 24 membri (di cui fu presidente il Beke e segretario il Mikola) con il compito di concretare le vie da seguire per conseguire l'indicato scopo. I lavori di tale commissione cominciarono il 7 Dicembre di quell'anno e proseguirono poi in modo regolare e fecondo come vale a provarlo il volume che ci sta sott'occhio.

Nella prima adunanza uno dei commissari (il Prof. K. Goldziehr) fece conoscere l'andamento seguito ed i risultati che diede il movimento riformatore presso le varie nazioni e presentò una completa bibliografia dell'argomento, la quale, per la sua estensione (avrebbe occupati cinque fogli di stampa), non potè sgraziatamente venire inserita nel volume di cui ci occupiamo: auguriamo che per altra via possa venire a conoscenza del pubblico!

In ognuna delle sedute successive uno dei commissari presentò

Digitized by Google

una relazione sopra un determinato argomento, concludendo con un certo numero di proposte *(Tesi)*, che vennero discusse dall'intera commissione e portarono a voti collegiali.

Per rendere conto della considerevole somma di lavoro compiuto e dei frutti che diede, senza oltrepassare i limiti di spazio che ci sono imposti, riferiremo per ciascuna conferenza il soggetto trattato e le proposte fatte dal relativo oratore:

K. Fröhlich, *Intorno alla più opportuna ripartizione dell'insegnamento del calcolo nelle scuole medie di grado inferiore.*

Tesi: 1. Si tolga dal programma delle classi I e II la trattazione dei calcoli cronologici, nonchè i computi con le antiche misure di lunghezza e di peso e con angoli; e dal programma della III la regola del tre composta, il cambio delle monete, le regole di miscuglio e simili. 2. Si trasporti dalla I alla II classe il calcolo con frazioni qualunque, le relative operazioni e i relativi sviluppi più complicati; i calcoli cambiari (di cui si chiede l'espulsione dal programma della III classe) siano fusi con i calcoli di rendite e rimandati alle classi superiori. 3. Nel programma della III classe si introduca quanto di algebra concerne l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione ed eventualmente la divisione con numeri interi positivi.

A Péch, *Il modo grafico nell' insegnamento della matematica.*

Tesi: 1. L'applicazione del metodo grafico in tutto l'insegnamento matematico è assai più necessario di quanto si è ritenuto sinora. 2. Nell'insegnamento dell'aritmetica il metodo grafico deve servire di preferenza ad illustrare certi risultati o concetti. 3. Nell'insegnamento dell'algebra si curi la rappresentazione mediante coordinate delle funzioni e delle espressioni che si incontrano. Corrispondentemente si usi lo stesso metodo per la dimostrazione di proposizioni. Si curi che lo scolaro consegua una sufficiente famigliarità con la risoluzione grafica dei problemi. 4. In ogni stadio dell'insegnamento si presti una speciale attenzione alle curve empiriche.

S. Mikola, *Il metodo euristico nell' insegnamento della matematica nelle scuole medie di grado inferiore.*

Tesi: 1. Riteniamo che, tanto dal punto di vista dell'insegnamento della matematica, quanto per la fisica, sia desiderabile che le scuole siano fornite dei relativi strumenti di misura e che agli scolari sia offerta occasione di compiere da sè le più importanti misure ed osservazioni. 2. Per quanto lo consentano i mezzi

Digitized by Google

di cui dispone e l'ordinamento di ogni scuola, noi riteniamo necessario che in connessione con l'insegnamento della matematica vengano fatte in presenza della scolaresca le misure corrispondenti ad ogni stadio dell'insegnamento e che esse formino il punto di partenza pei problemi di matematica. 3. Il professore di matematica colga qualunque occasione per abituare gli scolari al misurare ed all'osservare per quanto lo consentano gli strumenti che stanno a sua disposizione.

J. Rados, *Sull'insegnamento delle discipline geometriche.*

Tesi: 1. In ogni stadio dell'insegnamento le discipline geometriche debbono venire incorporate nell'insegnamento matematico. 2. Nelle scuole medie l'insegnamento definitivo della geometria cominci nella III classe. 3. Anche nei ginnasii (licei) l'insegnamento geometrico deve comprendere qualche parte della geometria descrittiva. 4. Nelle scuole reali (tecniche) si mantenga l'attuale programma di geometria descrittiva. 5. È desiderabile che la geometria analitica venga insegnata anche nei ginnasii. 6. In ogni suo stadio, lo studio della geometria vada accompagnato dal disegno. 7 La preparazione degli insegnanti venga riformata in conformità a tali esigenze.

P. Szabó, *L'insegnamento geometrico nelle prime classi.*

Tesi: 1. L'insegnamento propedeutico della geometria (disegno lineare) deve abbracciare le classi I-III. 2. La materia di tale insegnamento propedeutico deve essere strettamente legato alla vita pratica; per ciò nelle due prime classi planimetria e stereometria debbono venire insegnate insieme. Nella III classe s'insegneranno gli elementi dell'agrimensura. 3. Il disegno assonometrico troverà posto in fine della II classe, ma non deve andare oltre i poliedri. 4. Il disegno, come elemento d'educazione di valore pari a quello dello studio della geometria, deve essere sempre legato organicamente con tale studio. 5. Gli insegnamenti dell'aritmetica e della geometria nelle prime classi devono affidarsi, per quanto sia possibile, allo stesso insegnante.

L. Kopp, *L'ordinamento della materia geometrica in Ungheria ed all'estero.*

Tesi: 1. I così detti corsi " costruttivi „ di geometria nelle classi III e VI sono superflui e le ore di disegno geometrico dedicate ad essi sono da aggiungere a quelle concesse all'insegnamento della matematica. 2. L'insegnamento dottrinale della geometria cominci nella III classe. 3. Le proposizioni

Digitized by Google

della planimetria e della stereometria s'insegnino per quanto è possibile insieme, ed in generale si rilevino più spesso possibile le relazioni che esistono fra le varie discipline geometriche. 4. I concetti fondamentali della trigonometria si espongano insieme alla teoria della similitudine. 5. Si omettano tutti quei teoremi di trigonometria che servono soltanto ad eseguirvi calcoli logaritmici. 6. Nella stereometria si insista specialmente sopra il lato geometrico; quindi si rimandino all'algebra come esercizii le applicazioni più complicate delle formole per il calcolo delle aree e dei volumi. 7. L'insegnamento geometrico sia connesso al disegno, affinchè nelle classi superiori venga sfruttata l'abilità nel disegno ottenuta nelle due prime classi.

A. Privorszky, *Sulla questione dell'insegnamento del disegno geometrico nelle scuole medie.*

Tesi: L'insegnamento del disegno geometrico nelle classi superiori si divida in due parti. Una *obbligatoria*, essendone la materia organicamente collegata con l'insegnamento teoretico; l'altra *facoltativa* e dotata di un carattere puramente pratico. Nei ginnasii si espongano praticamente gli elementi della geometria descrittiva, mentre nelle scuole reali vi si colleghino anche gli elementi dell'assonometria e della prospettiva con le relative costruzioni di ombre. In tutte queste costruzioni la misura deve avere una gran parte, chè le figure sono sempre da eseguirsi col mezzo di modelli ed in iscala fissata. Qui potrebbero anche trovare il loro posto gli esercizi di geodesia, naturalmente dopo che fosse stato esaurita la parte teorica della trigonometria.

J. Winter, *Sopra le tavole di logaritmi ed il regolo calcolatore.*

Tesi: 1. Nelle mani degli scolari siano poste tavole a *quattro* decimali che consentano di trovare, nel campo 1-1000 o 0-999 i logaritmi ed antilogaritmi; la disposizione di tali tavole sia tale che abiliti a trovare i logaritmi e gli antilogaritmi senza sfogliare il volume, senza lunghe ricerche e senza calcoli, cioè istantaneamente (V. le tavole in Erdmann-Köthner *Naturkonstanten*, Berlin, Springer, 1905). 2. Si evitino le tavole d'interpolazione. 3. Nelle dette tavole debbono trovarsi *a*) i logaritmi a quattro decimali delle funzioni trigonometriche, *b*) le tabelle degli angoli corrispondenti ai logaritmi delle funzioni angolari, *c*) i veri valori delle funzioni angolari a quattro decimali, *d*) i fattori d'interesse corrispondenti a $(1{,}0\ \text{p.})^{\mp n}$, *e*) una tavola di mortalità. 4. Finalmente la tavola contenga altre tabelle utili di formole, costanti

Digitized by Google

e valori numerici che s' incontrano nelle applicazioni. 5. Si richiede che gli insegnanti di matematica nelle scuole medie prestino una certa attenzione al regolo calcolatore, e che si sforzino di farlo conoscere ai loro migliori discepoli, in particolare a coloro che intendono consacrarsi alla tecnica.

L. Rätz, *L' introduzione delle funzioni e del calcolo infinitesimale nelle scuole medie.*

Tesi: 1. La rappresentazione grafica e la variazione delle funzioni debbono insegnarsi a fondo. 2. La geometria analitica. 3. Gli elementi del calcolo infinitesimale debbono introdursi nell'insegnamento.

G. Szabó, *Rapporti fra la matematica e la fisica.*

Tesi: 1. Gli artificiosi problemi algebrici e geometrici siano notevolmente ridotti ed il tempo così risparmiato si adoperi a risolvere particolareggiatamente i più importanti gruppi di questioni di fisica. 2. Nello stabilire il concetto di funzione si usino, per quanto possibile, funzioni fisiche. 3. Si dia grande importanza alla trattazione grafica delle più importanti funzioni fisiche (come ad es. $y = ax$, $y = a. \frac{1}{x}$, $y = ax^2$, $y = a. \frac{1}{x^2}$, $y = a.$ sen $\alpha x + b.$ sen $\beta x + \ldots$). 4. Si faccia ogni sforzo affinchè resti chiaro il contenuto reale d' ogni formola.

E. Beke. *La preparazione degli insegnanti di matematica in rapporto ai tentativi di riforma.*

Tesi: 1. Si curi che vengano completate le nozioni dei candidati all'insegnamento sopra la matematica elementare, sia con conferenze ed opportuni esercizi, sia ponendo a loro disposizione le migliori opere relative. 2. Si curi che i candidati si famigliarizzino con la parte pratica dell'insegnamento elementare. 3. Gli esami vertano esclusivamente sopra materie tecniche. 4. Si tengano corsi feriali. 5. Il candidato compia l'anno di prova presso un insegnante di notoria abilità e propenso ai tentativi di riforma. 6. Alla preparazione degli insegnanti partecipino anche i politecnici. 7. Sia accordato il debito posto anche al lato storico e filosofico delle teorie, per elevare il livello scientifico dell'ascoltatore. 8. I seminari destinati alla formazione degli insegnanti sieno forniti, non soltanto di opere scientifiche, ma anche di trattati relativi all' insegnamento medio, nazionali ed esteri. 9. Anche la scuola ove il candidato compirà il suo anno di prova sia fornita

Digitized by Google

di tali trattati tecnici nonchè di collezioni di modelli. 10. Sarebbe desiderabile fissare il corso di studi pei futuri professori e con la collaborazione di tutti i professori che attualmente partecipano alla preparazione dei medesimi.

A. Czakò, *Alcune osservazioni dal punto di vista dei tecnici.*

Tesi: Nei politecnici la meccanica venga insegnata nel primo semestre.

Dalla *Relazione sopra i lavori e le deliberazioni della Commissione* che chiude il presente volume, si apprende che i voti riferiti furono nella loro totalità accettati, dopo di avervi apportate le piccole modificazioni necessarie per formarne un tutto organico. E tale sorte realmente meritavano perche, pur essendo informati all'aspirazione verso il nuovo, sono lontani da ogni sorta di esagerazione. Ma, anche chi per avventura non condividesse tale modo di vedere (1), dovrà convenire con noi come forse nessuna pubblicazione didattica anteriore tratti con altrettanta estensione e profondità tutte le questioni che in questi ultimi anni s'imposero agli studiosi dell'ordinamento dell'istruzione matematica nelle scuole medie, epperò giustificherà l'insolita lunghezza della presente recensione.

G. L.

Matematica elementare.

M. de Franchis. *Complementi di Geometria,* ad uso degli Istituti tecnici (2°. biennio), Palermo, R. Sandron, 1912, (Prezzo L. 3).

La pubblicazione di un nuovo libro di " Complementi di Geometria „ per le scuole medie di secondo grado (Istituti tecnici 2° biennio), data la scarsezza di buoni lavori del genere, costituisce sempre un avvenimento; se poi autore ne è il De Franchis, l'avvenimento è del più alto interesse. Perchè il De Franchis non è soltanto il docente che raccoglie allori nell'insegnamento universitario e nei campi più elevati della Scienza, ma è anche il cultore appassionato delle questioni più vitali pertinenti all'insegnamento matematico, è l'autore stimato di un corso di opere

(1) Naturalmente, prima di accogliere o respingere i *teoremi* di cui, per ragioni di spazio, noi riferimmo i semplici enunciati, bisogna che il lettore ne esamini le *dimostrazioni* che si trovano nell'opera originale.

Digitized by Google

matematiche per le scuole medie del 1° e 2° grado, che fra poco con la pubblicazione, già annunziata, dei " Complementi d'Algebra „ e gli " Elementi di Trigonometria sferica „ per gli Istituti tecnici, sarà completo.

Questi " Complementi di Geometria „ sono il coronamento del metodo, esposto dall'A. nella sua " Geometria elementare „ per le scuole di secondo grado, l'opera più bella e più importante della produzione scolastica del De Franchis, destinata, senza dubbio, a rimanere classica per il modo nuovo secondo il quale vengono esposti i fondamenti della Geometria.

Movendo dalle sole nozioni primitive di *punto* e *segmento*, l'A. definisce il *movimento* come un'*operazione* che gode di ben determinate proprietà caratteristiche, e ne trae una definizione generale dell'*eguaglianza (congruenza* o *sovrapponibilità*), che, oltre ad essere pienamente rigorosa, presenta notevoli vantaggi didattici.

Con *eguaglianza* e *movimento*, infatti, non si esprime che un medesimo concetto, cioè una *relazione biuniforme fra due figure* (classi di punti) considerata o nella *corrispondenza* che essa determina sui punti delle due figure o come *operazione* che fa passare da ogni punto dell'una al corrispondente dell'altra. Sebbene il concetto di operazione richiami una manifestazione della nostra attività pratica, pure esso logicamente non esprime alcun atto. Nell'atto lo stato finale è concatenato all'iniziale; tale legame manca invece nell'*operazione logica* che riflette enti astratti e quindi immutabili di loro natura. L'operazione, dunque, in Logica non è che un'espressione metaforica di relazione. Così il movimento in Geometria non è che la relazione di eguaglianza, espressa con una parola improntata, per felice metafora, alla Meccanica. E se questa parola richiama alla mente l'idea di *moto di un corpo rigido*, il rigore non ne viene per ciò solo menomato, ma l'insegnamento ne trae vantaggio, perchè, come bene osserva il De Franchis, " le parole e la maniera di presentare uno stesso soggetto possono talvolta influire sopra menti non ancora avvezze ad una severa disamina delle idee! „.

È bene poi che dagli elementi appaia l'importanza di questi due concetti di *classe* e *relazione*, che, appartenenti alla Logica, fondamento inconcusso di ogni scienza, sono poi i soli a cui tutta la matematica pura può essere ridotta: gli obbietti di questa, come osserva il Couturat, modificando una conclusione del Kempe,

Digitized by Google

sono *classi sottoposte a relazioni.* Ciò spiega perchè la teoria degl'insiemi e quella dei gruppi hanno acquistato tanta importanza da tenere il dominio in ogni speculazione matematica.

Tutto questo mi è sembrato opportuno premettere, perchè un insegnante che ha tenuto, in Geometria elementare, un metodo diverso da quello del De Franchis, non trovi in ciò una ragione sufficiente per non adottarne i " Complementi „. Peraltro poche premesse bastano per mettere, se occorre, la scolaresca nel nuovo ordine di idee, ed è sufficiente poi il primo capitolo del libro, dove si studiano alcune corrispondenze biunivoche, perchè i discenti possano prendere possesso del nuovo metodo. Chi ha, per es., studiato l'eguaglianza secondo il Veronese, non troverà difficoltà alcuna nel distinguere questa in diretta ed inversa e seguirà con grande interesse la classificazione che l'A. fa, in modo completo ed elegante, delle varie specie di eguaglianza per le figure di un piano.

Il metodo stesso conduce l'A. a svolgere la teoria della similitudine in poche pagine, con sviluppi che per la prima volta s'introducono in una trattazione elementare. Così egli dimostra con la massima semplicità che una similitudine piana diretta, se non è una traslazione, ammette un centro, e quindi è il prodotto di un'omotetia per una rotazione; e una similitudine piana inversa, se non è un'eguaglianza, ammette un centro, e però è il prodotto di una omotetia per un ribaltamento intorno ad una retta passante per il centro.

Nel § 2 l'A. dà la nozione di potenza di un punto rispetto ad una circonferenza e ne trae argomento per parlare delle *inversioni (o trasformazioni per raggi reciproci)*, le quali, data la loro importanza, specialmente per la risoluzione di una estesa classe di problemi, sono a torto trascurate nella maggior parte dei trattati elementari. Dimostrando che le inversioni conservano gli angoli, l'A. ne fa un'applicazione alla *proiezione stereografica* e quindi alla costruzione di alcune carte geografiche *(carta di Tolomeo, mappamondi).* Fra le applicazioni si trova risoluto il problema famoso di Apollonio: *costruire una circonferenza tangente a tre circonferenze date complanari.*

Di grande interesse è il § 3, dove sono sviluppati gli elementi della teoria dei vettori. Il vettore è definito per astrazione in base alla relazione di *equipollenza (traslazione)* dei segmenti. La definizione nominale non è necessaria, ma non impossibile. Di-

Digitized by Google

fatti, essendo la relazione di equipollenza simmetrica e transitiva, si perviene, per il *principio di astrazione del* Russell, a definire nominalmente il vettore AB come la classe di tutti i segmenti equipollenti a un dato segmento AB.

In particolare, l'eguaglianza di due vettori non è che l'eguaglianza di due classi.

Sull'osservazione che il prodotto di due traslazioni è una traslazione (proprietà transitiva della relazione di equipollenza) è definita la somma di due vettori. L'A. usa la notazione del Peano (B—A per indicare il vettore AB), assai opportuna, in virtù del principio di economia, perchè richiama alcune proprietà algebriche. Mostrando come ai vettori di un piano si possano far corrispondere i numeri complessi, egli definisce il prodotto di un vettore per un numero complesso: esso è il vettore che si ottiene operando sul dato con un'omotetia di caratteristica uguale al modulo del numero complesso e una rotazione di ampiezza eguale all'argomento del numero stesso.

Ciò basta all'autore per stabilire le prime nozioni di geometria analitica del piano in coordinate cortesiane ortogonali: distanza di due punti, equazione della retta, angolo di due rette, equazione della circonferenza, formole di trasformazione delle coordinate. Infine, come bello ed opportuno coronamento della teoria svolta nei §§ precedenti, l'A. applica la teoria dei vettori alla ricerca delle formole dei movimenti piani, delle similitudini, delle inversioni, e considerando poi, più generalmente, le trasformazioni dei tipi:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z' = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad (ad-bc \lesseqgtr 0;\ z, \bar{z} \text{ numeri complessi coniugati})$$

(affinità dirette ed inverse), dimostra che queste si possono ottenere componendo similitudini con inversioni, e perciò hanno la proprietà di trasformare circoli in circoli e di conservare gli angoli.

Queste trasformazioni sono applicate con vantaggio alla successiva teoria dei rapporti anarmonici e quindi alle proiettività fra le forme di prima specie. Il capitolo infine si chiude con le nozioni di polo e polare rispetto ad una circonferenza.

Il capitolo II tratta dei problemi fondamentali della *Geometria descrittiva* col metodo di Monge e termina con la rappresentazione dei poliedri regolari. L'A. prende a questo proposito l'oc-

Digitized by Google

casione di riprodurre la teoria dei poliedri regolari, già trattata in appendice alla sua Geometria elementare.

Segue poi un terzo capitolo sulla geometria sferica ed un quarto ed ultimo capitolo sulle sezioni coniche. Dopo lo studio delle coniche coi metodi elementari, l'A. trova, col metodo dei vettori, le equazioni delle coniche in coordinate cartesiane e ne fa alcune interessanti applicazioni a questioni di meccanica e di balistica. L'opera infine si chiude con un breve studio delle coniche come curve omografiche del circolo.

Quest'argomento, come qualche altro trattato nel primo capitolo, non è richiesto dagli attuali programmi, ma, come avverte l'A., tali argomenti possono essere tralasciati senza che ne venga menomata la chiarezza di tutta la parte rimanente. L'insegnante però, se il tempo glielo consente, non trascuri di svolgere tutto il lavoro (che appena raggiunge le 200 pagine), perchè il 2° biennio di Matematica negli Istituti tecnici non è fine a se stesso, ma serve di preparazione ai corsi universitarî. E questi « Complementi » sono scritti a tale scopo.

La modernità del metodo, la sapiente concatenazione degli argomenti, la sobrietà elegante dell'esposizione ne fanno un libro che sarà di grande vantaggio all'insegnamento. Il De Franchis ha, con esso, aggiunto ancora una perla alla preziosa sua collana di opere scolastiche.

MICHELE CIPOLLA.

G. HERTING, *Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral*. B. G. Teubner, Leipzig [Mk. 2,80].

Questo libro di 135+IV pgg. contiene il corso sviluppato dall'autore in questi ultimi anni nelle classi superiori del Ginnasio umanistico S. Anna in Augsburg, ed è stato scritto per uso degli allievi delle ultime classi delle scuole medie superiori ed anche per coloro che intendono di acquistare, da sè, una cultura matematica elementare.

Convinto che le diverse applicazioni pratiche nei vasti campi delle scienze naturali, della tecnica e delle industrie abbiano contribuito, piú che qualunque encomio, ad aumentare l'interesse per la matematica, l'A. ritiene che nell'insegnamento elementare si debba far uso prima dei *metodi fisici* e poi dei metodi logici: prima impari lo scolaro un gran numero di proposizioni attra-

Digitized by Google

verso *misure fisiche*, poscia costruisca rigorosamente il suo edifizio geometrico, senza però mai tralasciare di far uso dei *metodi fisici* là dove la trattazione rigorosa di un dato argomento importi grandi difficoltà di studio.

La determinazione di π e quelle dei volumi del prisma, del cilindro, della piramide, del cono, della sfera, ecc. sieno fatte fisicamente, per imprimerle meglio nella mente, in un primo studio elementare; più tardi sarà un bene rintracciarne i risultati per altra via. E così, con metodo infinitesimale, nel libro dell'Herting si cercano aree e volumi già noti, giungendo gradatamente, alla nozione d'integrale definito. Gli integrali $\int_a^b x^n\,dx$, $\int_0^\varphi \cos\varphi\,d\varphi$, $\int_0^\varphi \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$ (il primo calcolato per $n = 1, 2, 3, 4$) sono sufficienti per risolvere parecchi esercizii di geometria, di fisica, di meccanica, d'idrostatica, d'aerostatica, ecc.

Il libro — non adottabile forse in nessuna scuola italiana per la diversità dei programmi — è degno di essere letto e studiato, specialmente da coloro che intendono acquistare con poca spesa di tempo — ma senza gran rigore — una limitata cultura matematica che valga a far intuire — e magari a far risolvere qualche volta — quistioni un po' più alte di quelle che ordinariamente trattansi nelle nostre scuole medie.

È interessante, ad ogni modo, notare gli sforzi che all'estero, specialmente in Francia, in Germania ed in Inghilterra, si fanno per semplificare alcune questioni, ritenute finora di esclusivo dominio delle matematiche superiori, per portarle nel campo elementare. In un periodo nel quale si discute di tali questioni, il tentativo dell'Herting non può passare inosservato.

Per dare un'idea più precisa del contenuto del volumetto, ne riportiamo l'indice.

Capitolo I. *Misura e calcolo di linee*: Proporzionalità fra segmenti rettilinei, triangoli simili, relazioni nel triangolo rett. e nel cerchio, brevissimo cenno delle equazioni trigonometriche e goniometriche, determinazione del numero π.

Capitolo II. *Misura e calcolo di aree piane.* 1. Aree limitate da poligonali; graduale introduzione di considerazioni infinitesimali, dapprima nei casi più semplici: parallelogrammo, triangolo (insieme di piccolissime, e infinitamente piccole, grandezze). 2. Aree limi-

Digitized by Google

tate da linee curve: parabola, cerchio, ellisse, potenziale elettrico $\left(\text{parabola } y = \frac{c}{x^2}\right)$.

Capitolo III. *Misura e calcolo di aree e volumi di corpi:* cubo ppd. rett., prisma retto, cilindro circolare retto, tronco di cilindro circolare retto con basi tangenti fra loro (Zylinderhufe), prisma obbliquo, piramide, cono circolare retto, sfera e sue parti, toro, ellissoide.

Capitolo IV. *Alcuni integrali definiti*, i cui valori, in parte, sono stati già trovati nei calcoli dei cap. II e III.

$$\int_b^a x^n \, dx \, , \quad \int_\gamma^\beta \cos\varphi \, d\varphi \, , \quad \int_\gamma^\beta \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, .$$

La valutazione del primo integrale è fatta mediante la serie $1^n + 2^n + \ldots + z^n$ per alcuni casi: $n = 1.2.3.4$ Il caso di $n = 1$ è escluso, il caso di $n = -2$ è trattato in altro modo, il caso di n frazionario è sviluppato mediante esercizii geom.. I valori degli altri due integrali si leggono, per così dire, in figura.

Applicazioni di questi integrali a parecchie questioni: Calcolo di aree e volumi, determinazione di centri di gravità di linee, superficie, corpi regola di Guldino; alcuni problemi di idrostatica ed aerostatica, calcolo dei momenti d'inerzia di linee, superficie e corpi.

A. Perna.

G. Marletta. *Trattato di geometria elementare ad uso delle scuole secondarie superiori.* Catania, Giannotta. 1912.

L'autore prende le mosse da quei suoi "*Principi di geometria euclidea* [1] .. nei quali era notevole principalmente l'introduzione del concetto di rette parallele prima del concetto di piano, indipendentemente anche dalla nozione di uguaglianza di segmenti, di cui fa uso il Veronese.

La trattazione, estesa al programma tradizionale di geometria delle nostre scuole liceali e del primo biennio degli istituti tecnici, si svolge informata costantemente alle norme di rigore dettate dalla critica sui fondamenti, così che il libro prende buon

[1] Periodico di matematica per l'insegnamento second. Anno XX fas. VI.

Digitized by Google

posto fra quei testi di geometria elementare che, in poco più d' un decennio, hanno iniziato ed affermato brillantemente il rinnovamento scientifico-didattico nel nostro paese.

Seguendo il Pasch ed il Peano, l'autore assume come primitivi solo i concetti di punto e di segmento, e definisce tutte le altre figure, fondando lo sviluppo logico delle loro proprietà sopra un sistema di postulati che appare didatticamente conveniente. Ai postulati necessari ne sono aggiunti, per semplicità di trattazione, alcuni altri, e lo stesso autore indica quali fra le proposizioni dimostrate nelle prime pagine del testo potrebbero ancora essere assunte come primitive per avviare più rapidamente l'insegnamento.

Il libro s'avvicina agli *Elementi* del Veronese per la trattazione delle teorie dell' uguaglianza e della similitudine, ed è bene. Le corrispondenze d' uguaglianza e di proporzionalità del Veronese non sono infatti da apprezzare solo come fondamento d'uno sviluppo logicamente perfetto di quelle teorie, ma altresì (ed io l' ho sperimentato) come mezzo didatticamente assai utile per la semplicità che ne deriva, perchè evita ogni possibile tautologia nei discenti e perchè stabilisce nel modo migliore l'analogia fra le teorie stesse.

Il libro si divide in due parti: la prima espone, in quattro capitoli successivi, quanto riguarda l' uguaglianza, l' equivalenza, la similitudine e la misura delle figure piane; la seconda, in altrettanti capitoli e nello stesso ordine, svolge le stesse teorie per le figure solide.

Le nozioni di punto e di segmento vengono assunte con i primi due postulati; altri cinque postulati riguardano l'appartenenza di punti a segmenti e preludono alla definizione di prolungamento di un segmento e a quella di retta (figura formata da un segmento e dai suoi due prolungamenti). Ammessa poi l'esistenza di punti fuori d' una retta, vengono dimostrate le prime proposizioni sulle rette e sui raggi; indi s'introducono l' angolo convesso, come la figura rettilinea (nel senso di Veronese) determinata da due raggi aventi la stessa origine, e l' angolo piatto (semipiano) come la figura composta di due angoli convessi adiacenti. Due rette si dicono parallele se esiste un semipiano avente una di esse per origine e contenente tutti i punti dell'altra. L'autore perviene a questa definizione dopo aver dimostrato che, date due rette r ed s, se esiste un semipiano

Digitized by Google

avente r per origine e contenente tutti i punti di s, esisterà analogamente un semipiano avente s per origine e contenente tutti i punti di r. La dimostrazione di questo teorema si fonda sopra quest'altra proposizione: dato un angolo piatto (O)A.M cui appartenga una retta r, se C è un punto di questa, uno dei due raggi aventi C per origine apparterrà all'angolo A(O)C e l'altro raggio apparterrà all'angolo B(O)C, essendo (O)B opposto di (O)A, proposizione che l'autore dimostra nei suoi « *Principi* », ma che qui assume come postulato. Io dubito che essa abbia carattere intuitivo piú evidente del teorema che la segue. Il concetto di appartenenza di una retta ad un semipiano essendo già quello di parallelismo della retta data e della origine del semipiano, crederei forse più opportuno didatticamente postulare senz'altro il teorema stesso.

Segue il postulato delle parallele, indi la definizione del piano secondo il Veronese; ad essa fanno seguito i teoremi circa l'appartenenza di punti, rette e piano, e intorno alle parti in cui il piano è diviso da una sua retta.

Dopo aver ammesso, l'esistenza della classe di segmenti uguali ad un segmento dato e le prime proposizioni sull'eguaglianza dei segmenti, si stabiliscono le relazioni $>$, $<$, e si definisce la somma e la differenza di segmenti. Si dà poi la definizione d'eguaglianza di due figure qualunque, e si deduce l'eguaglianza delle rette, dei raggi, l'invertibilità dell'angolo, l'eguaglianza dei semipiani, degli angoli supplementari d'angoli uguali, ecc.; e infine si dimostrano i teoremi sull'uguaglianza di due triangoli che abbiano uguali due coppie di lati e la coppia d'angoli compresi, ovvero le tre coppie di lati (il triangolo è la figura rettilinea determinata dai suoi tre vertici). Il § seguente contiene le note proposizioni sulle rette parallele incontrate da una trasversale e il teorema sulla somma degli angoli d'un triangolo. Un altro § si occupa del triangolo isoscele, delle rette perpendicolari, del raggio bisettore d'un angolo e del punto medio d'un segmento, di cui si dimostra l'esistenza ricorrendo all'uguaglianza dei triangoli, anzichè alla corrispondenza d'uguaglianza fra l'angolo o il segmento e l'angolo o il segmento invertiti. Si parla poi delle relazioni di disuguaglianza fra una coppia di lati e la coppia di angoli opposti d'un triangolo, e di due triangoli aventi uguali le altre due coppie di lati; si stabilisce l'altro criterio d'uguaglianza di due triangoli (aventi un lato e due angoli ordinata-

Digitized by Google

mente eguali) e, nel solito modo, si parla dei segmenti di un punto ad una retta, del luogo dei punti equidistanti da due punti o da due rette. I rimanenti § di questo capitolo espongono successivamente: i soliti principali teoremi sui poligoni (qui vengono definiti solo i convessi) e sui parallelogrammi (chiamati, forse inopportunamente, rombi come dal Faifofer), le prime proprietà del cerchio (perchè l'autore non preferisce qui la parola circonferenza?) e i teoremi sugli angoli al centro, gli archi corrispondenti e le corde sottese; i teoremi sulla posizione relativa d'una retta e d'un cerchio; le nozioni relative ai centri di circoli inscritti e circonscritto ad un triangolo, all'ortocentro ed al baricentro; i teoremi sugli angoli al cerchio — preceduti da una considerazione più rigorosa della consueta dei punti della circonferenza interni ad un angolo al cerchio — e sulla iscrittibilità e circoscrittibilità d'un quadrangolo convesso; le proposizioni sulla posizione relativa di due cerchi; le costruzioni elementari; infine i soliti teoremi sui poligoni regolari con un accenno alla costruibilità per via elementare.

La trattazione non si scosta molto dalla ordinaria, ma è condotta con la cura del maggior rigore. A proposito del § sulla posizione relativa di due cerchi, osserverò che didatticamente è forse più semplice partire dalle diverse ipotesi che i cerchi siano esterni, si taglino, ecc., e dedurre le relazioni fra la distanza dei centri e la somma e la differenza dei raggi, anzichè seguire il cammino inverso, come fa l'autore.

Nel cap. II della planimetria, estesa la definizione di poligono alla figura dei punti di più poligoni convessi adiacenti, vengono esposti i principali teoremi e problemi sull'equivalenza dei poligoni, fondando — come di solito — la teoria sul postulato d'Archimede e sul principio di De Zolt, assunto pure come postulato. L'estensione del concetto di equivalenza (considerata qui come equiscomponibilità in poligoni uguali) a figure piane finite (non poligonali) viene differita al cap. IV per le conseguenze immediate che ivi se ne traggono per l'area del cerchio. Ai simboli AB' e AB.CD, usati in questo capitolo, sarebbero preferibili gli altri: q(AB) e r(AB,CD), che tengono più lontani gli alunni da certe locuzioni improprie, con le quali essi mostrano talora di confondere i teoremi dell'equivalenza con quelli della misura.

La teoria della proporzione, di cui si occupa il cap. III, è svolta secondo l'indirizzo classico euclideo; la divisibilità d'un

Digitized by Google

segmento e d'un poligono in un numero qualunque di parti uguali essendosi estesa inizialmente all'angolo (e quindi all'arco) con un postulato, e ammettendosi — per semplicità didattica — anche per l'angolo il postulato d'Archimede. Alle consuete relazioni fra i multipli e summultipli di due grandezze omogenee seguono gli ordinarii teoremi sulle proporzioni, sulle grandezze direttamente e inversamente proporzionali e infine il così detto teorema di Talete con le sue solite applicazioni. Elegante è la trattazione delle figure piane simili con la quale si chiude il capitolo, trattazione informata, come già dissi, al principio della corrispondenza di proporzionalità.

Premesse le proposizioni che conducono al teorema d'Euclide sulla ricerca della massima comune misura di due grandezze omogenee, il libro tratta quanto si riferisce al concetto di misura, supponendo nota la teoria dei numeri reali, svolta col metodo delle classi contigue di razionali che è sempre il più diffuso nell'insegnamento elementare. Sono introdotte le notazioni A_b+, A_b- per designare grandezze commensurabili con B e rispettivamente maggiori e minori di A. Dopo aver detto dell'area dei poligoni, si parla delle classi contigue di grandezze e — asserito il postulato della continuità — si viene alla rettificazione della circonferenza, dando un cenno del metodo dei perimetri e l'enunciato della regola di Schwab per il calcolo approssimato di π.

Indi vengono ripresi il concetto e le proposizioni sull'equivalenza, ed estesi alle superficie piane finite. Riservando la parola equivalenza per i poligoni, qui si usa opportunamente l'altra " equiestensione ". Si da poi la misura del circolo. Ad un cenno sulla rettificazione approssimata della circonferenza e sulla quadratura approssimata del circolo, seguono le solite applicazioni dell'algebra alla geometria, che si chiudono con una chiara esposizione della costruzione grafica delle espressioni algebriche. Osservo che invece del teorema di Pappo sulla mediana d'un triangolo, esposto qui in forma metrica, sarebbe stato più utile dare la nota e feconda formola dello Stewart.

Lo schema dello svolgimento della stereometria — contenuto entro limiti un po' ristretti — è analogo, come già dissi, a quello della planimetria, e permette di mettere facilmente in rilievo le analogie e le differenze fra le teorie corrispondenti e di avvicinarne, se si credesse opportuno, la trattazione.

Digitized by Google

Il I cap., che è il più esteso, comincia con le prime proprietà del piano e continua con i teoremi sulle rette e piani paralleli, rette e piani perpendicolari, sui diedri e sui piani perpendicolari e si chiude con i soliti teoremi sugli angoli e sui poliedri convessi. Noto che sarebbe stato opportuno trattare in questo capitolo — a proposito delle proprietà di posizione e dell'uguaglianza — anche del cono, del cilindro e della sfera, di cui è dato un brevissimo cenno nel capitolo della misura.

Il II cap. tratta dei prismi equivalenti, dei solidi equiestesi e, in particolare, dei prismi e piramidi equiestesi.

Alle figure solide simili s'estendono i teoremi con cui s'inizia lo studio della similitudine piana, e lo sviluppo, rapido ed efficace, si chiude con le relazioni fra le superficie e fra i solidi di poliedri simili.

Il trattato termina con poche pagine relative alla misura delle superficie dei solidi e con la determinazione del loro volume. Anche per la sfera, per euritmia di svolgimento, sarebbe stato bene far precedere alla determinazione del volume il teorema relativo alla equiestensione, come s'è fatto per il cilindro e per il cono.

Il libro che ho esaminato è molto buono; esso apparirebbe anche migliore se le figure fossero più numerose e intercalate nel testo più convenientemente. Auguro che l'autore tenga conto dell'osservazione per una ristampa che seguirà certamente presto (1).

A. Finzi.

M. de Franchis, *Elementi di Trigonometria rettilinea, ad uso dei Licei.* Palermo, R. Sandron, 1912. (Prezzo L. 1).

In materia di Trigonometria innumerevoli sono i trattati ed i trattatelli italiani. Di essi gran parte non sono che riproduzioni, o traduzioni più o meno esplicite, e non sempre ben fatte, del vecchio e sempre classico Serret. E doloroso rilevare che i

(1) Poichè il libro m'è piaciuto specialmente per il rigore di tutta l'esposizione, addito all'autore che in pochissimi enunciati manca qualche parola; p. es. nei Cor. II e III del n. 37 occorrerebbe dire « aventi un *solo* punto » e « due rette *distinte* del piano », nel t. 359 occorrebbe precisare la corrispondenza fra i lati dei due triangoli. Sarebbe forse bene anche dare una definizione migliore (magari sotto forma negativa) di « serie illimitata » a pag. 185.

Qua e là occorrerebbe premettere qualche osservazione empirica a certi postulati; l'osservazione di pag. 9 dovrebbe precedere, anzichè seguire, il post. 9°.

Digitized by Google

peggiori interpreti del matematico francese, col pretesto del buon mercato, godano la miglior fortuna nelle nostre scuole!

A fianco ai travisatori del Serret, non mancano le trattazioni impeccabili e complete; ma queste, spesso per la loro troppa austerità e diffusione di particolari, riescono inadatte a certi ordini di scuole. La mole stessa del libro spaventerebbe gli alunni non meno che i loro genitori, e potrebbe anche destare la meraviglia dell' insegnante, che, in confronto a tanto inchiostro trigonometrico, ha visto un autore d'Algebra elementare riunire in un solo capitoletto i pochi principii di trigonometria!

Il libretto del de Franchis, di piccolo formato, e scritto appositamente ad uso dei nostri licei, compendia in poco più di 60 pagine l' intera trigonometria rettilinea.

Con un esame sommario degli argomenti dei singoli paragrafi mostreremo, adesso, come l'autore sia riuscito ad esporre i principii e le formole fondamentali della trigonometria, conciliando il massimo rigore con la chiarezza e, soprattutto, con la maggiore semplicità possibile.

Al § 1, definita in modo preciso l' eguaglianza dei versi di due segmenti di una medesima retta, e, fissato uno dei versi d'un dato segmento come principale, distingue i segmenti positivi da quelli negativi, secondo che essi abbiano, o no, versi eguali al verso principale.

Dopo ciò, con le medesime norme della teoria dei numeri relativi, accenna al confronto, alla somma ed alla differenza dei segmenti relativi, e stabilisce, con tutta generalità, la nota relazione lineare fra i segmenti relativi determinati da quanti si vogliono punti di una retta di verso principale fissato.

È notevole che, pel nostro autore, le dette relazioni segmentarie hanno, in pari tempo, il carattere di relazioni numeriche in quanto ha innanzi dichiarato d'indicare col simbolo AB, non soltanto il segmento relativo determinato dai punti A e B, ma anche il numero relativo, che rispetto ad una unità di misura esprime il valore del segmento stesso, non avendo peraltro tralasciato di notare l' isomorfismo tra il calcolo dei segmenti relativi ed il calcolo delle loro misure.

Con una definizione nominale l'autore passa quindi a stabilire la nozione di direzione positiva d'una retta di verso positivo fissato. Questa è nient'altro che quella delle due semirette aventi per origine un punto O, che contiene tutti i segmenti positivi

Digitized by Google

della retta con un estremo in O. Indi, uscendo dalla retta, distingue l' eguaglianza e l' ineguaglianza delle direzioni positive di due rette parallele.

Il concetto d'eguaglianza dei versi di due angoli propri o no, situati nello stesso piano, o in piani paralleli, è fondato sulla esistenza d'un movimento che porti a coincidere certe tre semirette in altre tre ben definite; ed ove si consideri, che la nozione di movimento è, nella Geometria (1) del nostro Autore, introdotta in maniera da non prestarsi ad alcuna delle obiezioni logiche e scientifiche della moderna critica, eguale merito è da attribuire alle attuali definizioni. Come per i segmenti di retta, è definito un verso principale angolare (verso positivo di rotazione) nel piano; sono distinti gli angoli positivi dai negativi e sono estese agli angoli (ed ai loro radianti), sotto forma di congruenze rispetto al modulo 2π, le relazioni già stabilite per i segmenti.

Dette brevemente cose analoghe per gli archi d' una circonferenza, il § 1 è chiuso dal teorema fondamentale relativo alla indipendenza del rapporto fra la proiezione d'un segmento d'una retta r, sopra un'altra s, ed il segmento stesso, dalla scelta di questo segmento, con la condizione che sia costante l'angolo formato dalle direzioni positive di r ed s. Il valore costante del detto rapporto è assunto, nel § 2, come definizione del *coseno* dell'angolo di due direzioni positive, e sono subito ricavate la periodicità di questa funzione, le relazioni tra i coseni di angoli opposti, supplementari, o differenti di π.

Il *seno* dell'angolo di due direzioni positive è definito mediante il coseno dell' angolo complementare, ed è immediatamente mostrato che esso può essere considerato pure come rapporto costante fra la proiezione d'un segmento qualunque scelto sul secondo lato dell'angolo ed il segmento stesso, assunta come asse di proiezione la direzione complementare del primo lato.

La tangente, la secante, la cosecante e la cotangente d'un angolo sono in maniera svelta definite rispettivamente come i rapporti tra il seno ed il coseno, l'inverso del seno e l'inverso della tangente dell' angolo stesso. Quando si pensi alla natura ed agli

(1) M. De Franchis. Geometria elementare ad uso dei Licei e degli Istituti. Sandron, Palermo.

Digitized by Google

orarii esigui della scuola per cui è scritto questo libriccino, si comprende di leggieri la grande convenienza ed opportunità di queste definizioni, che, mentre presentano per la prima volta le varie funzioni circolari sotto aspetto puramente numerico (evitando così la possibilità dell'errore, in cui cadono comunemente gli alunni, di considerarle come segmenti), fanno conoscere altresì le relazioni fondamentali che fra esse intercedono, e permettono di dedurre immediatamente dalle proprietà di una di esse altrettante proprietà delle rimanenti.

Non è, però, tralasciata, diciam così, l'interpretazione geometrica delle dette definizioni analitiche, giacchè più tardi, al § 5, introdotta la nozione di coordinate cartesiane d'un punto, è stabilito il significato delle funzioni circolari in rapporto agli archi di una circonferenza trigonometrica, aventi l'estremo in quel punto; sono studiati, illustrati e raccolti in appositi quadri sinottici i segni e le variazioni delle sei funzioni medesime.

Il teorema d'addizione del coseno è stabilito al § 3, partendo dal principio delle proiezioni relativo alle spezzate piane. La generalità di questo metodo circa la grandezza ed il verso degli angoli addendi offre il vantaggio di evitare le noiose distinzioni di casi, cui costringono gli altri metodi, eccettuati i casi limiti, nei quali del resto il teorema stesso è senz'altro evidente.

Un altro motivo di preferenza di questo metodo deriva da ciò che, con la scelta di angoli di forma speciale, è permesso di stabilire subito la formula d'addizione del seno e si rende quasi superflua la deduzione delle formule di sottrazione.

Dalle formule particolari di duplicazione è ricavata semplicemente la relazione tra il seno ed il coseno d'uno stesso angolo, ma si sarebbe forse raggiunto più presto lo scopo applicando una sola volta il teorema d'addizione del coseno a due angoli opposti. È dedotta una nuova dimostrazione del teorema aritmetico di Pitagora, come saggio d'applicazione della trigonometria; ed è a notare che questa deduzione non involge alcuna tautologia, come, pur troppo, si deplora in qualche libro corrente.

Dopo le formole di bisezione ed un brevissimo cenno sulle tavole logaritmico-trigonometriche, l'autore s'intrattiene un poco sul calcolo diretto delle funzioni circolari di alcuni angoli particolari, partendo dalla considerazione generale, che il seno ed il coseno di $\frac{\pi}{n}$ sono rispettivamente, per $n>2$, la metà del lato

Digitized by Google

e l'apotema del poligono regolare di n lati, inscritto nel cerchio di raggio 1.

Il § 10 è destinato alle relazioni fra gli elementi d'un triangolo, di cui quelle, che ordinariamente vanno sotto il nome di *teorema delle proiezioni* sono dedotte dal principio delle proiezioni applicato ad un triangolo, in cui un lato sia assunto come asse di proiezione. Con la proiezione sulla direzione complementare a quella d'un lato, è dedotto il teorema del seno. La perfetta equivalenza dei due sistemi di formole è messa in luce dimostrando come dalle prime possano essere ricavate le seconde e viceversa.

Il teorema di Carnot è ricavato dalle tre formole di proiezione con l'eliminazione di due angoli e quello di Nepero e le formole di Gauss sono ottenute dal teorema dei seni. Con le formule logaritmiche che esprimono gli angoli mediante i lati è così preparato tutto il materiale sufficiente alla risoluzione dei casi fondamentali dei triangoli.

Con evidente risparmio di tempo le relazioni che collegano gli elementi d'un triangolo rettangolo sono derivate come casi particolari da quelle relative al triangolo generale.

La risoluzione dei triangoli rettangoli ed obbliquangoli è esposta sinteticamente in due quadri a tre colonne; nella prima delle quali è contradistinto il numero d'ordine del caso considerato; nella seconda sono segnati gli elementi dati; e nella terza stanno indicate, in corrispondenza a ciascun caso, le formole logaritmiche che occorrono per la risoluzione.

A questa disposizione ritengo che l'autore sia stato indotto dal duplice desiderio di congiungere l'economia dello spazio e l'utile comodità dell'alunno che, trovando riunite in un piccolo specchio tutte le formole da impiegare per la risoluzione dei triangoli nei varii casi, è agevolato, in grande misura, nell'uso e nella memoria delle formule.

Naturalmente, data la natura della scuola a cui il libretto è destinato, sono evitate le minute discussioni intorno ai casi in cui qualcuno dei problemi ammetta una, nessuna o più di una soluzione. Del resto l'opportunità di indugiarsi su ciò, che dipende principalmente della forza intellettiva variabile della scolaresca, come la scelta di adeguati esercizi che servano di applicazione agli argomenti dei varii paragrafi, sono lasciate al prudente arbitrio dell'insegnante che, anche fuori della matematica, deve costituire, per così dire, l'anima del libro di testo.

Digitized by Google

Il libro di testo, come guida sicura dell'insegnamento, è necessario che contenga solamente le linee direttive fondamentali della materia; ma queste linee debbono esser nitide, precise, chiare e tracciate con rigore e semplicità. Le sfumature sono riservate all' insegnante.

Ora, dopo l' esame fatto, noi riteniamo che nessuno possa disconoscere questi alti pregi nel libretto del de Franchis, di cui il nome, del resto, è noto abbastanza sia nella scienza come nella scuola; e non esitiamo per conseguenza a raccomandarlo con vivo interesse ai professori intelligenti dei licei italiani, sicuri di indicare un' operetta sotto tutti gli aspetti degna del loro insegnamento.

GASPARE MIGNOSI.

A. PENSA, *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole secondarie inferiori* (130 figure nel testo, 280 esercizi e 4 tavole). 8°. p. 175, Torino, Petrini-Gallizio, 1912. (Prezzo L. 1.80).

Prefazione:

> Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell'affermare tutte cose vere, e nel non affermare cose che sappiamo non vere. Non sta nell'affermare tutte le verità possibili. La scienza, o la verità è infinita; noi non ne conosciamo che una parte finita, e infinitesima rispetto al tutto. E della scienza che conosciamo, noi dobbiamo insegnare solo quella parte che é maggiormente utile agli alunni.
>
> Quindi per essere rigorosi, non è necessario di definire tutti gli enti che consideriamo...
>
> E anche dove si può definire non è sempre utile il farlo...
>
> (G. PEANO. *Sui fondamenti dell' Analisi*, Bollettino della « Mathesis », anno II, 1910).

Sono tanti i trattati di Geometria elementare per le Scuole medie inferiori, e la maggior parte così simili tra loro, che non avrei consigliata la *Casa Editrice* G. B. Petrini di pubblicare questi *Elementi di Geometria* del Dott. A Pensa, se non avessi veduto in essi molto di nuovo e di un nuovo sano. La moderna *onda logica* (l'A. è stato allievo del Professore G. Peano) vi si manifesta con i suoi più potenti mezzi didattici: *assoluta precisione di linguaggio, somma semplicità, continuo riferimento ad enti concreti del*

Digitized by Google

mondo fisico. Chi è al corrente dei moderni studi di Geometria, potrà chiaramente vedere attraverso la veste elementare e semplice di questi *Elementi*, un contorno puramente scientifico: chi è nuovo agli studi geometrici, credo che potrà apprendere senza sforzo quanto è esposto in questo libro. Coloro per i quali sono *ottimi* la maggior parte dei trattati attuali, e che ritengono ancora *esser necessario escludere la precisione e il rigore per poter fare un libro* VERAMENTE *elementare,* troveranno forse *pessimi* questi *Elementi;* e, in tal caso, l'A. potrà esser certo che il suo lavoro è buono.

Il substrato scientifico è fornito dalla importante memoria di M. Pieri, *La Geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera* (1). Al concetto, sebben semplice, di *sfera* è peraltro sostituito quello più comune e intuitivo, di *distanza*; anzi quello materiale di *filo teso tra due punti*, o quello fornito dal *compasso.* Data l'idea *materiale* di PUNTO (§ I) e di FIGURA GEOMETRICA (classe di punti), il *filo teso* fornisce quella di RETTA; dalla retta deriva il PIANO; il compasso, o il filo teso tra due punti dà la DISTANZA fra essi; la costante eguaglianza delle distanze dei punti corrispondenti di due figure, conduce alle FIGURE EGUALI (2); la SOVRAPPONIBILITÀ, così intuitiva e così utile didatticamente, è pure introdotta e largamente usata in seguito, e l'A. non dimentica di far vedere, in modo elementare e pratico, che essa non coincide in generale, con l'*eguaglianza.*

Nel § II è contenuta una rapida esposizione delle *figure e grandezze geometriche elementari.* Questa parte di *necessaria nomenclatura* è assai sobria, ma chiara. E in questo § che comincia a delinearsi il concetto didattico informatore del libro: *disporre i vari argomenti in modo tale da poter fare, fin dall'inizio e poi continuamente, applicazioni, o metriche o grafiche.* Le prime applicazioni sono metriche e relative alle ampiezze degli angoli.

---

(1) *Memorie di Matematica e di Fisica della Soc. ital. delle Scienze*, s. III, t. XV pp. 345-450 (1908).

(2) Si intende *eguali rispetto alla grandezza*, ma non *rispetto alla posizione.* Volendo conservare alla parola *eguale*, e al segno $=$, il significato *universale logico*, leibniziano, di *identità assoluta*, sarebbe meglio adoperare la parola, usata da alcuni, *congruenti*, o altra che si creda più opportuna. Ritengo peraltro che l'A. abbia fatto bene a non andare totalmente contro l'uso comune.

Digitized by Google

Nei trattati ordinari, prima di arrivare alle *costruzioni fondamentali*, si trova necessario di far percorrere all'alunno gran parte della classica geometria sui triangoli ecc., rendendogli noioso e antipatico uno studio che dovrebbe riuscir divertente. Nel § III sono subito trattati i *problemi grafici fondamentali*. Della *copia di un segmento* vien ricercata *la somma e differenza di lunghezza*; la *copia di una terna di punti* (senza passare per la *formale* eguaglianza dei triangoli) permette di ottenere, e *giustificare*, le usuali costruzioni fondamentali. Si intende *giustificare sperimentalmente*; chè la *giustificazione scientifica* richiede l'intiero sistema di postulati indicato da M. Pieri, sistema che non è possibile sviluppare completamente neanche in una scuola media superiore (1).

Vengono in seguito (§ IV) le costruzioni dei *triangoli*, dalle quali sono *dedotti* i *criteri di eguaglianza*; e non viceversa, come si fa ordinariamente andando dall'*astratto* (teoremi sull'eguaglianza) al *concreto* (costruzione dei triangoli). Analogamente per i poligoni (§ V), con speciale riguardo ai parallelogrammi e trapezi, che sono le figure di uso comune. Sono pure ben messe in luce le *proprietà caratteristiche* dei *parallelogrammi, rettangoli* e *rombi*, proprietà che forniscono uno dei più notevoli e semplici esercizi logico-deduttivi, che non escono dai limiti della potenzialità intellettuale degli alunni delle scuole medie inferiori.

Nei §§ VI e VII vien alterato profondamente, ma opportunamente (come, del resto, anche nei §§ precedenti), l'ordine usuale d'esposizione. L'*equivalenza* e la *misura dei poligoni* (§ VI), che offrono tante applicazioni semplici e praticamente utili, precedono quelle proprietà (§ VII) della circonferenza (*tangenza, angoli inscritti, poligoni regolari,* ecc.), che, pur avendo applicazioni, ne hanno, o di poco importanti, o di troppo difficili pei giovani che cominciano lo studio della geometria. Condizione necessaria affinchè l'insegnamento elementare sia proficuo, è certamente quella di ordinare in modo da avere, fin da principio, materiale sufficiente per poter fare *continuamente* applicazioni, metriche o grafiche, semplici e interessanti.

---

(1) Ciò non dice che dalla memoria di M. Pieri sia impossibile trarre un ottimo e semplice libro di geometria per le scuole medie superiori. Basta applicare i criteri, che ho trascritti in questa prefazione, di G. Peano. Certamente il lavoro da fare è vasto e non facile.

Digitized by Google

La *similitudine* (§ VIII) è pure trattata in modo sobrio, semplice e chiaro. Anche qui le applicazioni metriche e grafiche non hanno bisogno di aspettare la fine di una interminabile esposizione teorica, e il *rapporto*, introdotto subito come numero, libera il lettore dalla pesante e antiquata nomenclatura delle proporzioni.

Nel § IX, *misura della circonferenza e del cerchio*, il numero π cessa (e forse per la prima volta!) di essere semplicemente 3,14 o 3,1416 o 22/7, e viene adoperato con tante cifre decimali quante occorrono in ogni particolare problema per ottenere una approssimazione *stabilita a priori*; rimane sotto la forma letterale, esatta, π, quando non è richiesta una determinata approssimazione.

Le *generalità sulle figure non piane* (§ X) sono date sotto forma semplicissima e limitate a quelle necessarie per la *descrizione* delle principali figure solide e per ottenere quelle loro proprietà indispensabili al calcolo di aree e volumi. Seguono i *Poliedri* (§ XI) e le *Superfici e solidi di rotazione* (§ XII). Sono ben messe in evidenza le regole pratiche, date sotto forma semplicissima, per il calcolo di aree e volumi.

Il lettore cercherà invano in questo libro del Dott. A. Pensa, le definizioni di *spazio,* di *punto,* di *linea,* di *superficie,* che formano i capi-saldi della maggior parte dei comuni trattati e che non si trovano più nei pochi buoni; esse, come è ben noto, costituiscono dei non-sensi. — L'ordinaria, arida e pesante, esposizione a base di *teoremi, corollari, lemmi,* è qui abbandonata quasi del tutto, ed è sostituita da una forma piana e scorrevole che, se non m'inganno, deve esser facilmente intelligibile ai giovani studenti. — Le dimostrazioni non sono sempre date. Come " *non è necessario definire tutti gli enti che si considerano* ", così *non è necessario dimostrare tutte le proposizioni che si enunciano.* Alcune delle dimostrazioni (stampate, tutte, in carattere piccolo) sono, come già ho accennato, più che vere dimostrazioni scientifiche, delle *verificazioni sperimentali mediante la sovrapposizione.* Ciò è quanto basta in una scuola media inferiore; e basta, non perchè essa scuola sia popolata da elementi *immaturi* ed educati all'*empirismo*, ma perchè lo studio iniziale di ogni scienza *deve aver base sperimentale* e perchè l'educazione al ragionamento logico *deve* essere fatta gradatamente dalle cose più semplici alle più complesse. — Gli esercizi (che potranno esser completati, sebbene già numerosi, in una seconda edizione che auguro prossima) sono

Digitized by Google

dei semplici *problemi*, metrici, o grafici: non dei *teoremi da dimostrare* (salvo poche e opportune eccezioni), chè non è possibile *pretendere* dagli alunni delle Scuole medie inferiori un tale genere di esercizio scientifico. — Molti dei problemi metrici richiedono la risoluzione delle equazioni $ax = b$, $ax^2 = b$, $ax^3 = b$. Qualche anno fa tali *elevate* (?) questioni si trattavano soltanto nelle *ultime* lezioni di Algebra, dopo aver data una abbondante nomenclatura algebrica e fatto un abbondante calcolo su monomi e polinomi ordinati; oggi tali questioni son trattate fin dall'inizio del corso di *Aritmetica pratica*, almeno da molti, e quindi è da sperare che non si condannerà l'A. per aver fatto uso delle spedite e semplici forme moderne, abbandonando quelle tradizionali.

C. Burali-Forti

Rassegna delle recenti dissertazioni di laurea.

Arno Kleber, *Ueber einige mehrdeutige Verwandschaften zweier Ebenen.* Diss. Rostock, 1911.

Le prime linee della teoria delle trasformazioni multiple fra due piani furono tracciate in Italia dal de Paolis e dal Visalli; in seguito tale teoria non ebbe fra noi altri cultori. In Germania essa fu studiata nel senso che si considerarono molti casi particolari suggeriti da considerazioni metriche e cinematiche, il che spinse ad aggiungere ai problemi già considerati altri relativi alla realtà degli elementi che si incontrano. A tale categoria di studi appartiene anche la Dissertazione del Kleber, ove si considerano trasformazioni (1,3) o (1,4) collegate al moto di un circolo che ruzzola sopra un altro; l'A. si propone fra l'altro di determinare dove si trovano i punti a cui corrisponde un triangolo equilatero od un trapezio isoscele ed è così condotto a considerare alcune notevoli curve metricamente specializzate.

Leopold Frederich Braude, *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve.* Diss. Heidelberg, 1911.

È noto che, detti s e R l'arco ed il raggio di curvatura di una curva, questa è individuata (a meno di movimenti nel piano) da un'equazione della forma $f(s, R) = 0$. Resta in corrispondenza determinata una seconda curva $f(x, y) = 0$, quando x, y s'inten-

Digitized by Google

dano come coordinate cartesiane ortogonali di un punto, la quale geometricamente si può definire come luogo dei centri di curvatura dei punti di contatto della data curva con una retta, che si ottengono facendola ruzzolare sopra di questa; è la « curva di Mannheim » della data. Ora è chiaro che infinite curve analoghe si possono ottenere facendo ruzzolare la data sopra altre linee fisse non rette. Tale è il punto di partenza del lavoro del Braude, il quale contiene altre generalizzazioni del concetto di « curva di Mannheim » esposte nell'intento di dedurne nuove formole e nuovi teoremi, che completano altri notissimi dovuti a Steiner ed Habich.

Georg Eggers, *Ueber gewisse mit den Kegelschnitten zusammenhängende ebene Kurven höherer Ordnung.* Diss. Halle, 1911.

Date in un piano due curve ed un punto fisso, e detti ϱ_1 e ϱ_2 i raggi vettori di due punti delle curve allineati col punto fisso, si può considerare una terza curva caratterizzata dalla proprietà indicata dalla formola $\varrho = \varrho_1 + \varepsilon \varrho_2$, ove ε è un numero che generalmente si suppone eguale a ± 1. Il caso in cui una delle curve date sia una conica e l'altra il cerchio podaria di un suo fuoco, fu già trattato dal Rolle nel 1909. Ora nei due primi capitoli del presente lavoro vengono considerati i casi in cui una delle curve date sia ancora una conica mentre l'altra ne sia la podaria rispetto ad un vertice od al centro: nascono così delle curve degli ordini 5,8,12 che l'A. discute e disegna accuratamente. Nell'ultimo capitolo vengono considerate delle curve analoghe, ma che si deducono dalle stesse linee indicate mediante la relazione $\varrho = \varrho_1 \varrho_2$.

Hans Kössler, *Ueber windschiefe Kegelschnitte.* Diss. Halle, 1911.

Il prof. L. Bianchi, nelle sue ricerche sopra la deformazione delle quadriche, ha incontrato una classe di curve gobbe dotate della proprietà di mutarsi in coniche quando si svolga sopra un piano la superficie costituita dalle loro tangenti. Di tali curve altri si sono occupati, sia in generale, sia in casi speciali (il lettore li troverà indicati nel lavoro in discorso); ma ne mancava una metodica trattazione: il Kössler, per consiglio del suo mae-

Digitized by Google

stro, Prof. Gutzmer, si è proposto di farla e vi è riuscito. Limitiamoci a rilevare che nella rappresentazione analitica delle curve di cui si tratta entrano quadrature che non si possono eseguire.

EDUARD LETZ, *Die Verfolgungskurve des Kehlkreises auf den Rotationsflächen konstanter Krümmung.* Diss. Halle, 1912.

La questione trattata in questo scritto è una generalizzazione di altra studiata in una Dissertazione di cui parlammo a suo tempo (*Bollettino*, T. XII, 1910, p. 118); in questa si estendeva dal piano alla sfera la nozione e le proprietà delle notissime « curve di fuga »; in quella che annunciamo oggi si fa altrettanto nell'ipotesi che la superficie su cui si opera sia una superficie di rotazione a curvatura costante e che il punto di partenza appartenga ad un circolo di gola della superficie. La ricerca è più complicata e difficile, epperò più interessante.

HANS FALCKENBURG, *Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen.* Diss. Erlangen, 1912.

Nel presente scritto è svolta l'osservazione, fatta da E. Schmidt nell'introduzione della sua memoria *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* (Math. Annalen T. LXV, 1908), che le teorie ivi esposte sono applicabili allo studio delle equazioni a derivate parziali ellittiche e non lineari.

FRIEDA NUGEL, *Die Schraubenlinien. Eine monographische Darstellung.* Diss. Halle, 1912.

Mentre la letteratura matematica possiede parecchie esposizioni metodiche delle proprietà delle curve « piane » speciali, ne mancano di congeneri relative a quelle « sghembe ». La presente memoria intende di colmare in parte tale lacuna, perchè porge un riassunto ben ordinato di tutto quanto si conosce intorno alle « eliche », cioè tanto per quelle tracciate sopra un cilindro circolare retto (Cap. I), quanto per quelle esistenti sopra un cilindro qualsivoglia (Cap. II) o sopra altre superficie (Cap. III). Tale lavoro, fondato sopra uno studio diretto delle fonti, rettifica alcune notizie storiche errate e si chiude con un ricco elenco di scritti concernenti le curve indicate.

Digitized by Google

WALTHER JUST, *Ueber den Büschel kubischer Raumkurven auf einer Fläche zweiten Grades durch vier ihrer Punkte.* Diss. Breslau, 1912.

Di una quadrica si chiamino g le generatrici di un sistema e l quelle dell'altro. Presi sopra la superficie quattro punti arbitrari vi sono due sistemi semplicemente infiniti di cubiche gobbe passanti per questi punti; le curve dell'uno hanno le g per bisecanti e le l per unisecanti, per quelle dell'altro succede l'opposto; siccome per ogni punto della superficie passa una curva di ciascun sistema, così a ragione l'autore lo indica col nome di « fascio ». È appunto questa la figura studiata nel presente lavoro. Ove, applicando i metodi sintetici sempre usati dal prof. R. Sturm (che diresse l'autore nel compiere questa memoria), sono caratterizzate molte figure geometriche collegate ad un fascio di cubiche gobbe. Così è dimostrato che le corde di tali curve costituiscono un complesso tetraedrale, relativo al tetraedro avente per vertici i punti base del fascio; mentre le loro tangenti costituiscono una congruenza che è la completa intersezione di tale complesso con quello formato dalle tangenti della data quadrica. I loro piani osculatori inviluppano una superficie di sesta classe e decimo ordine. Le loro binormali formano una congruenza di ottava classe e sedicesimo ordine, mentre le loro normali principali ne costituiscono una di quattordicesima classe e di diciottesimo ordine, ecc. ecc.

C. POLIDORI, *Ricerche sulle omografie ed antiomografie piane nella geometria complessa.* Feltre, 1912.

Quantunque l'A. non lo dica esplicitamente, pure questo scritto ha tutto l'aspetto di una dissertazione di laurea, onde ne facciamo cenno nella presente rubrica. Il tema di esso appartiene al *Nuovo campo di ricerche geometriche* schiuso dal Prof. Segre, ma venne ispirato dal prof. Montesano, il quale dedicò alla geometria complessa il suo corso di geometria superiore dell'anno 1905-06 e fu costante guida all'autore nella compilazione del presente scritto. Se non c'inganniamo, la novità che questo presenta consiste meno nelle conclusioni che nei metodi di dimostrazione.

AUBERY J. KEMPNER, *Ueber das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen.* Diss. Göttingen, 1912.

Digitized by Google

Nel 1782 E. Waring ha enunciato il teorema che ogni numero (sottinteso « intero positivo ») si può rappresentare come somma di un certo numero N di potenze n-esime; per $n=2$ è $N=4$, come affermò Fermat e dimostrò molto più tardi Lagrange; per $n=3$ si ha (secondo quanto afferma il succitato geometra inglese) $N=9$; per $n=4$, $N=19$. Ora per molto tempo riuscirono vani tutti gli sforzi per dimostrare sia il teorema generale sia questi casi particolari; finalmente l'Hilbert vi riuscì in generale ed il Wieferich per il caso $n=3$. In conseguenza il « problema di Waring » (cioè la determinazione del minimo valore di N in corrispondenza ad un assegnato valore di n) ha una estesa ed importante letteratura, che l'A. fa conoscere ed analizza nel presente scritto, il qual va raccomandato a tutti coloro che s'interessano ad un tema attualmente di moda.

E. Turrière, *Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné.* Thèse présentée à la Fac. des Sciences de Paris, 1911. (Toulouse, 1911).

Sotto il nome di *problema di Transon* i geometri francesi intendono la ricerca delle congruenze di normali contenute in un complesso di rette; le superficie a cui le rette del complesso sono normali si chiamano *trajettorie*. Sino del 1870 Darboux ha enunciato che « se per un complesso di rette si conosce a *priori* una famiglia di ∞' superficie trajettorie fra loro non parallele, il corrispondente problema di Transon si potrà risolvere senza introdurre nuove quadrature ». Il notevole lavoro del Turrière è destinato a svolgere completamente ed applicare questa importante proposizione, al quale scopo l'A. introduce nuovi concetti, che potranno tornare utili anche in altre occasioni. Esso si compone di undici Capitoli, di cui ecco i titoli:

I. Il teorema di Darboux. II. Formole generali. III. Complessi. IV. Classificazione dei complessi: linea figuratrice (1). Complessi semi-lineari. V. Complessi semi-quadratici. VI. Complessi definiti parametricamente. VII. Caso di una soluzione unica nota a *priori*. VIII. (manca). IX. Complessi speciali e com-

(1) È una curva determinata quando si conosca il complesso e che lo determina univocamente.

Digitized by Google

plessi di cui la conseguenza delle rette singolari è una congruenza di normali. X. Applicazione della teoria dei vortici al problema di Transon. XI. Equazione di Transon in coordinate curvilinee. XII. Scelta dei punti di partenza. Metodi tangenziali.

G. L.

Notizie.

Il cardinale di Cusa. Nella storia della matematica mancava uno studio esauriente sopra il Cardinale di Cusa; nessuno era più indicato a compierlo del Prof. Simon, che da tempo dedica tanta parte della sua attività alla investigazione dei primi stadi di sviluppo dei concetti fondamentali dell' analisi infinitesimale; quello che ora egli ci offre (*Cusanus als Mathematiker.* Festschrift H. Weber zu seinem LXX—ten Geburtstag am 5 März 1912 gewidmet von Freunden und Schülern. Leipzig, Teubner, 1912) si chiude con le seguenti parole: " Se il Cardinale di Cusa avesse posseduta la cultura teoretica di Regiomontano e se il suo tempo non fosse stato tanto assorbito dal servizio della Chiesa e dalle sue deplorevoli lotte, egli, come matematico puro, avrebbe conseguito un posto altrettanto eminente di quello che ha come teosofo e come filosofo-matematico „.

*
* *

Tema posto a concorso dalla R. Accademia di Danimarca: " Una serie di lavori sopra le curve algebriche del 5° ordine ha già data un' idea delle varie forme sotto cui possono presentarsi tali linee. Così D. Bancroft ha presentato nell'*American Journal* una prima classificazione delle quintiche senza punti doppi (T. X, 1888): ma nulla assicura che tale classificazione abbracci effettivamente tutte le forme essenziali. Nei vol. XXVI e XXVII dello stesso giornale (1904 e 1905) P. Field ha classificate per $p=0$ e $p=1$ le curve a punti doppi. Sullo stesso argomento esiste uno studio di Fr. Meyer (Dissertazione di Laurea, Monaco 1878) fondata sui principi di Tait, ed ancora altri lavori. È vero che la varietà delle forme trovate mostra le difficoltà di una classificazione, ma queste difficoltà non si possono ritenere insormontabili. Perciò l'Accademia promette la sua medaglia d' oro a chi risolverà la questione seguente:

Dare una classificazione completa, per quanto possibile chiara e

Digitized by Google

semplice, delle forme delle curve generali del 5° ordine; esaminare in quale misura sarebbe possibile applicare alcuni dei risultati ottenuti anche nel caso in cui si sostituiscano alla definizione algebrica della curva altre determinazioni che non le consentano di avere più di 5 punti reali sopra una retta. Per le curve non algebriche si terrà conto anche dei risultati concernenti le curve dotate di punti doppi.

I lavori dei concorrenti dovranno essere scritti in una delle lingue danese, danese-norvegese, svedese, inglese, tedesca, francese o latina e pervenire alla Segreteria dell'Accademia entro il 31 Ottobre 1913.

*
* *

STORIA DELL' ASTRONOMIA PRESSO GLI ARABI NEL MEDIO EVO: È questo il titolo di un corso di lezioni tenute nell'anno scolastico 1909-10 nell' Università del Cairo da A. Nallino e che sono destinate a diffondersi ampiamente nel mondo orientale essendo state pubblicate (Roma, 1911 e 1912) in quattro fascicoli. Essendo redatte in Arabo non ci è concesso che darne l' annuncio: che chiudiamo col voto di poterle leggere presto in una lingua intelligibile anche ai non Orientali ed ai non Orientaliati.

*
* *

LA " FUSIONE " NELL' INSEGNAMENTO MATEMATICO è il soggetto scelto da R. Schimmack per la lezione di prova onde ottenere la " venia legendi " in didattica matematica presso l' Università di Gottinga. Dal testo di essa pubblicato nel VII Heft dei *Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission,* Leipzig, 1912 (*Ueber die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts*) risulta che l' A. considerò tanto la fusione della planimetria con la stereometria, quanto quella della geometria con l'aritmetica: riguardo alla seconda egli diede alcuni esempi per dimostrare l'utilità didattica di illustrare geometricamente le proposizioni di aritmetica generale e di algebra; è strano che egli non abbia fatto rilevare come la prima radice anche di tale procedura risalga ai Greci, chè tutti i libri aritmetici degli *Elementi* di Euclide riposano sopra l' uso di rappresentazioni geometriche delle quantità considerate, mentre il II Libro insegna sotto forma geometrica alcune proposizioni fondamentali di aritmetica generale.

Digitized by Google

*
* *

Modelli di geometria ad uso didattico. La Casa Schilling, che finora aveva il monopolio della costruzione di modelli matematici in Germania, ha trovato ora un' emula della celebre Casa Teubner di Lipsia, la quale ha cominciata la costruzione di tali ausiliari didattici, sotto la direzione dei professori H. Wiener e P. Treutlein. Coloro che vogliono formarsi un esatto concetto dei criteri che guidarono nel loro lavoro questi chiari scienziati, ricorra, oltre che ad una comunicazione preliminare fatta dal primo di essi al III Congresso internazionale di matematici (Heidelberg, 1910), al *Verzeichniss mathematischer Modelle* testè pubblicato dall' anzidetta Casa libraria e ai due fascicoli di *Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle,* il I dovuto al Wiener (Leipzig, 1907 ; Mk. 3) ed il II al Treutlein (Id. 1911 ; Mk. 0.80), i quali, d' altronde, possiedono un valore ed un interesse anche prescindendo dal fine a cui mirano di illustrare la Collezione in discorso.

*
* *

La perenne fortuna di Euclide. Fra le numerosissime traduzioni di opere di Euclide registrate da P. Riccardi nel suo *Saggio di bibliografia euclidea* non se ne trova alcuna in Danese. A tale lacuna ha testè provveduto la sig. Thyra Eibe (con l'opera *Euklids Elementer oversat af....*) pubblicata in sei volumetti nel periodo di tempo 1897-1912, con prefazione e discorso di chiusura del Prof. H. G. Zeuthen, sul testo critico del Prof. J. L. Heiberg. Per ragioni facili a comprendersi non ci dilunghiamo in un' analisi di questo lavoro ; ma abbiamo voluto segnalarlo ai nostri lettori come prova della perenne fortuna del vecchio maestro Alessandrino:

*
* *

Una biografia di G. R. Boscovich, piena di particolari interessanti e di acute osservazioni, fu scritta nel 1887 da G. V. Schiaparelli ; rimasta inedita, epperò sconosciuta alla maggioranza, vide testè la luce nella rivista croata " Rada „ (Agram 1912) per cura di V. Varicak sotto il titolo *G. V. Schiaparelli o Boskovicu.*

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Adam 65, 69, 72.
Alasia 58.
Albrecht 18.
d'Alembert.
Amaldi 50.
Amodeo 58.
Anschütz-Kämpfer 22, 23.
Apelt 34.
Appell 39.
Apollonio 81, 103.
Archimede 53, 54, 55, 81, 111.
Arnauld 72.

Bachmann 62.
Ballog 96.
Bancroft 126.
Baroni 50.
Bassani 48.
Basset 88-89.
di Bath 64.
Bauer 46.
Beke 96, 100.
Bellavitis 1.
Bernardi 27-28.
Berner 81.
Bernoulli 81.
Berzolari 27.
Bettazzi 25.
Bianchi 29, 12.
Bigourdan 31.
Bjornbö 61-62.
Bôcher 44-46.
Boggio 7.
Bonola 50.
Boole 38.
Bordiga 5.
Borel 50.
Boscovich 128.
Bosmans 58, 59.
Boutroux 69.
Brandley 18.
Braude 121.
Braunmühl 161.
Brennan 23.
Bricard 91-93.
Burali-Forti 7, 121.
Burckhardt 63.

Calò 50.
Cantor M. 33, 35, 59.
Carcavi 71.
Casorati 39.
Castellano 7.
Castelnuovo 50.
Cauchy 74, 77.
Cavalieri 71.
Ceretti 58.
van Ceulen 58.
Cayley 29.
Chandler 18.
Chanut 67, 68.
Cherbuliez 36.
Chevillard 4.
Christensen 61.
Christoffel 73.
Cipolla 105.
Conrad 75
Coolidge 29-30.
Clebsch 78.
Conti 50.
Copernico 57, 66.
Coriolis 12.
Cousin 69.
Couturat 102.
Cremona 79.
Cristina (Regina) 67.
Cusa (Cardinale di) 126.
Czako 101.

Dalgwik 93-94.
Daniele 24, 50.
Darboux 14, 69, 125.
Desargues 71, 72.
Descartes 59, 65-73.
Devey 3.
Dietrich 4.
Democrito 34.
Dürer 49.
Duhem 57.

Eggers 122.
Eibe 128.
Elisabetta (Principessa) 67, 71.
Eneström 6, 36, 81,
Engel 73-79.
Enriques 50-51, 79.
Erdmann-Köthen 99.
Euclide 33, 35, 47, 64, 127, 128.
Eulero 10, 35, 37, 41, 71.

Faber 73.
Falckenburg 123.
Farber 51.
Favaro 60-61.
Fermat 71, 82-85.

Digitized by Google

Ferussae 81.
Ferrari L. 81.
Feuerbach 59, 60.
Fibbi 29.
Field 186.
Finzi 112.
Fleischer 50.
de Franchis 101-105, 112-117.
Fredholm 31.
Frenicle 72.
Fröbenius 39.
Fröhlich 97.
Foucault 20, 22.
Fuss 35, 36.

Galilei 61, 66.
Galois 44.
Gans 91.
Gauss 57, 62, 75.
Geiser 73.
Ghetaldi 59.
Gerberto 64.
Giacomini 50 G.
Giambelli 47.
Girard 59.
G. L. vedi Loria.
Goldziehr 96.
de la Goupillière 49.
Grassmann J. E. 74.
» H. 7, 31, 73-79, 90.
» H. jr. 90.
» R. 77.
Grozio 61.
Grunert 76, 78.
Guarducci 50.
Guldberg 37-42.
Guldino 107.
Gustavo Adolfo 67.
Gutzmer 123.

Habich 122.
Halphen 14.
Hamilton 7, 77.
Hankel 34, 35, 78.
Harriot 59.
Hatt 31.
Hauck A. 94.
» G. 94.
Heath 33-35.
Heiberg 61-128.
Helm 42-44.
Helmholtz 74.
Hensel 57.
Hermite 15, 81.
Herschell 38.
Herting 105-107.
Hesse 5.
Hilbert 53, 125.
Hovel 21.
Hultsch 34, 35.
Huygens Const. 71.
» Christ. 87.

Ingrami 53.
Innes 64.

Jacobi 14, 35, 74, 77.
Jolles 89.
Juel 81.
Just 124.

Karnasch 83.
Kempe 85, 102.
Kempner 124.
Kleber 121.
Klein F. 5, 8-24, 45, 47, 48, 62, 79.
Knappe 77.
Kommerell 56.
Königsberger 74.
Kössler 122.
Kopp 98.
Kovalewski 36, 37.
Krazer 35, 36, 73.
Kronecker 56, 57.
Kummer 29, 56-57, 76.

Lacroix 37.
Lagebein 76.
Lagrange 1, 11, 15, 35, 36.
Lamé 15.
Landau 42.
Lazzeri 48.
Lemoine 4.
Leibniz 76.
Lejeune-Dirichlet 57.
Léon 69.
Letz 123.
Libri 39.
Lie 40.
Lindemann 81.
Loewy 40.
Loftus 27.
Longchamps 81.
Loria 1, 28, 31, 35, 37, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 56, 57, 73, 79, 81, 86, 87, 89, 90, 91, 95, 105.
Lüroth 5.
Lukat 29.
Lusson 84.

Mach 24.
Mackenzie 63.

Digitized by Google

Mannheim 122.
Marcolongo 7.
Markoff 38.
Marletta 107-112.
Martin 63.
Matthiessen 55.
Maurer 73.
Medici 54.
Mehmke 28.
Mersenne 67-71.
Mertens 5.
Meyer 51, 126.
Mignosi 117.
Mikami 55-56.
Mikola 96, 97.
Milton 60.
Möbius 75, 76, 77.
Monge 92, 94, 104.
Montesano 124.
de Morgan 77.
Morland 59.
Müller F. 86.
» H. 34.
Mydorge 72.

Nallino 127.
Netto 51, 85-86.
Neumann C. 32.
Nugel 123.
Newcomb 19.

Obry 21.
d'Ocagne 91.
Ohrtmann 2, 3.
Oresme 57, 58.
Oughtred 59.
d'Ovidio 27.

Pacioli 61.
de Paolis 121.
Pappo 53, 63, 111.
Pascal B. 67.
» E. 38.
» S. 72.
Pasch 108.
Peano 7, 25, 104, 108, 117 119.
Pech 97.
Pensa 117.
Perazzo 93.
Perna 107.
Perren 41.
Pestalozzi 48.
Peyerle 49-50
Pieri 118, 119.
Pincherle 42.
Pitagora 56.
Platone 34.
Plücker 78, 88.
Poincaré 30, 31, 41.
Poinsot 10, 14.
Polidori 124.
Poncelet 80.
Preyer 79.
Pringsheim 26.
Privorszky 99.

Rados 96, 98.
Ragsdale 63.
Ranucci 82, 83.
Rayz 100.
Reallio 61.
Regiomontano 126.
Reye 89-90.
Riccardi 37, 128.
Riemann 14.
Rodenberg 24.
Rolle 25, 122.
Routh 13, 14.
Rudio 35, 36.
Russel 104.

Saint-Venant 76.
Salmon 88, 89.
Sannia 30.
Schaller 84, 85.
Scherl 23.
Schiaparelli 128.
Schimmack 127.
Schlegel 78.
Schlesinger 38, 40.
Schlick 9, 21, 22, 23, 24.
Schlömilch 5.
Schmid 94.
Schmidt 123.
Schooten 72.
Schröder 5.
Schubert 31-32.
Schwab 111.
Schwaez 63.
Scott 63.
Segre 124.
Seliwanoff 38.
Serret 46, 112-113.
Simon 126.
Simson 63.
Sommerfeld 8-24.
Smith 63.
Stäkel 35, 50.
Steiner 56, 64, 74, 122.
Sthéphanos 5.

Digitized by Google

Stevin 59.
Sturm R. 5, 124.
Sylvester 88.
Szabó 98, 100.

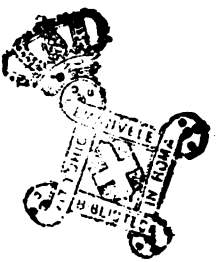
Talete 111.
Tannery 65, 69.
Taylor 25, 26, 44.
Teeteto 34, 35.
Thieme 50, 51, 54.
Thomé 39.
Tolomeo 103.
Torricelli 5, 67, 71.
Toulouse 91.
Transon 125, 126.
Treutlein 47-48, 128.
Turriére 125.

Vahlen 79-81.
Vailati 50, 64.
Valentin 2, 3, 4, 5.
Varicak 128.
Valson 74.
Veronese 103, 107, 108.
Vessiot 39, 40.
Viète 58, 59.
Villani 84.
da Vinci 61.
Visalli 121.
Vitali 50.
Vivanti 27, 44, 85.
von Vleck 41.
Volterra 20.

Wallemberg 37, 42.
Wallis 59.
Wanach 28.
Waring 124-125.
Weber H. 35, 36, 46.
Wederburn 60.
White 60.
Whitehead 21.
Wieferich 125.
Wiener H. 128.
Wilson 64.
Winter 99.
Wölffing 3.
Wohlrab 34.
Wright 63.

Young W. H. 25-27.

Zeemann 22.
Zeuthen 33, 128.



Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8°.

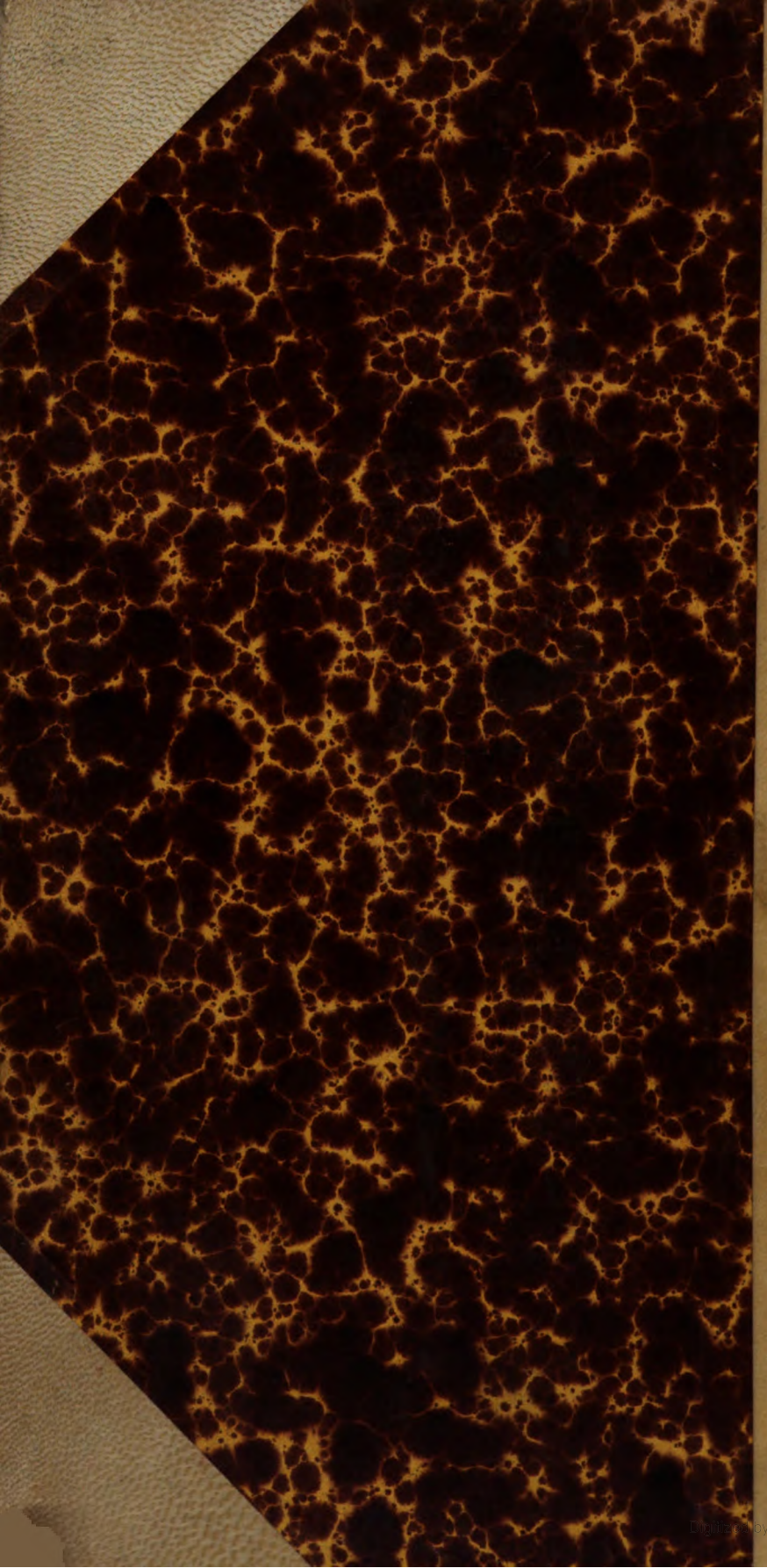
Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Digitized by Google

Digitized by Google



BIBLIOTECA
Digitized by Google